Nierówności macierzowe

Tomasz Tkocz

K MISMaP
Uniwersytet Warszawski

Toruńska Letnia Szkoła Matematyki 2009, 3.IX.2009r.

Plan

Zadanko na rozgrzewkę

Zadanie

Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą $n \times n$ o rzeczywistych współczynnikach. Udowodnić, że

$$|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Zadanko na rozgrzewkę

Zadanie

Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą $n \times n$ o rzeczywistych współczynnikach. Udowodnić, że

$$|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Rozwiązanie

$$|\det A| = \text{objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory kolumnowe macierzy A} \leqslant \text{iloczyn ich długości.}$$

Zadanko na rozgrzewkę

Przypadki szczególne

Dla $n = 2, A = \left[\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right]$:

$$|ru - st| \leqslant \sqrt{r^2 + t^2}\sqrt{s^2 + u^2} \quad \text{(nierówność Schwarza)},$$

dla $n = 3, A = \left[\begin{smallmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{aligned} &\left|rvz + swx + tuy - tvx - wyr - zsu\right| \\ &\leqslant \sqrt{r^2 + u^2 + x^2}\sqrt{s^2 + v^2 + y^2}\sqrt{t^2 + w^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Morał i motywacja

Morał

W macierzach można szukać (ładne) nierówności.

Morał i motywacja

Morał

W macierzach można szukać (ładne) nierówności.

Motywacja

- ważne zwierzę w fizyce statystycznej, to **suma statystyczna** postaci $\mathbf{tr}\,\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ (A — operator liniowy samosprzężony)
- bardzo ważne są jej różnorakie oszacowania

Morał i motywacja

Morał

W macierzach można szukać (ładne) nierówności.

Motywacja

- ważne zwierzę w fizyce statystycznej, to **suma statystyczna** postaci $\mathbf{tr\ e^A}$ (A — operator liniowy samosprzężony)
- bardzo ważne są jej różnorakie oszacowania

Morał i motywacja

Morał

W macierzach można szukać (ładne) nierówności.

Motywacja

- ważne zwierzę w fizyce statystycznej, to **suma statystyczna** postaci $\mathbf{tr}\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ (A — operator liniowy samosprzężony)
- bardzo ważne są jej różnorakie oszacowania

Morał i motywacja

Morał

W macierzach można szukać (ładne) nierówności.

Motywacja

- ważne zwierzę w fizyce statystycznej, to **suma statystyczna** postaci $\mathbf{tr}\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ (A — operator liniowy samosprzężony)
- bardzo ważne są jej różnorakie oszacowania

Umowa

Na przestrzeni $\mathbb{C}^n$ mamy zadany iloczyn skalarny $<,>$.

Nierówność Peierlsa–Bogolubowa

Twierdzenie

Dla operatorów liniowych samosprzężonych $A, B \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ zachodzi

$$\frac{\operatorname{tr} e^{A+B}}{\operatorname{tr} e^{B}} \geqslant \exp\left(\frac{\operatorname{tr} A e^{B}}{\operatorname{tr} e^{B}}\right).$$

W szczególności $(B = I)$

$$\frac{1}{n} \operatorname{tr} e^{A} \geqslant e^{\frac{1}{n} \operatorname{tr} A}.$$

Nierówność Goldena–Thompsona

Twierdzenie

Dla operatorów liniowych samosprzężonych $A, B\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ zachodzi

$$\operatorname{tr} e^{A+B} \leqslant \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right),$$

a nawet więcej

$$\operatorname{tr} e^{A+B} \leqslant \operatorname{tr}\left(e^{A/m} e^{B/m}\right)^m \leqslant \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right), \qquad 0 < m \in \mathbb{Z}.$$

Dryf do szkicu dowodu

$$\operatorname{tr} e^{A+B}$$

$$\leqslant \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right)$$

Dlaczego operatory samosprzężone są przyjemne?

Twierdzenie (Spektralne)

Jeśli operator liniowy $A\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ jest samosprzężony[a] ($A^\dagger = A$), to istnieje baza ortonormalna $u_1, \ldots, u_n$ oraz liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ takie, że

$$Au_k = \lambda_k u_k, k = 1, \ldots, n.$$

[a] przez $A^\dagger$ oznaczamy hermitowskie sprzężenie operatora A

Dlaczego operatory samosprzężone są przyjemne?

Twierdzenie (Spektralne)

Jeśli operator liniowy $A\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ jest samosprzężony[a] ($A^\dagger = A$), to istnieje baza ortonormalna $u_1, \ldots, u_n$ oraz liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ takie, że

$$Au_k = \lambda_k u_k, k = 1, \ldots, n.$$

[a] przez $A^\dagger$ oznaczamy hermitowskie sprzężenie operatora A

Definicja

Niech A — operator samosprzężony. Dla $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy operator $f(A)\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ określony na bazie $u_1, \ldots, u_n$ z twierdzenia spektralnego wzorem

$$f(A)u_k = f(\lambda_k)u_k.$$

Klucz

Twierdzenie

Dla operatora samosprzężonego $A\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ nieujemnego[a], funkcji wypukłej $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ i bazy ortonormalnej $v_1,\dots,v_n$ zachodzi

$$\operatorname{tr} f(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(< Av_k, v_k >\right).$$

[a] dla każdego $x \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $< Ax, x > \geqslant 0$

Klucz

Twierdzenie

Dla operatora samosprzężonego $A\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ nieujemnego[a], funkcji wypukłej $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ i bazy ortonormalnej $v_1, \ldots, v_n$ zachodzi

$$\operatorname{tr} f(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(< Av_k, v_k >\right).$$

[a] dla każdego $x \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $< Ax, x > \geqslant 0$

Dla $X\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ — dowolnego operatora liniowego weźmy $f(x) = x^m, m \in \mathbb{Z}_+$, $A = X^\dagger X$.

Klucz

Twierdzenie

Dla operatora samosprzężonego $A\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ nieujemnego[a], funkcji wypukłej $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ i bazy ortonormalnej $v_1, \ldots, v_n$ zachodzi

$$\operatorname{tr} f(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(< Av_k, v_k >\right).$$

[a] dla każdego $x \in \mathbb{C}^n$ zachodzi $< Ax, x > \geqslant 0$

Dla $X\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ — dowolnego operatora liniowego weźmy $f(x) = x^m, m \in \mathbb{Z}_+$, $A = X^\dagger X$. Mamy

$$\operatorname{tr}\left(X^\dagger X\right)^m \geqslant \sum_{k=1}^{n} < X^\dagger X v_k, v_k >^m = \sum_{k=1}^{n} < Xv_k, Xv_k >^m$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\| k\text{-ta kolumna macierzy } [x_{ij}] \text{ operatora } X \text{ w bazie } (v_k) \|^2 \Big)^m$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\| k\text{-ta kolumna macierzy } [x_{ij}] \text{ operatora } X$$

$$\text{w bazie } (v_k) \|^2 \Big)^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} |x_{lk}|^2 \right)^m$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\| k\text{-ta kolumna macierzy } [x_{ij}] \text{ operatora } X \\
&\qquad \text{w bazie } (v_k) \|^2 \Big)^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} |x_{lk}|^2 \right)^m \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} |x_{kk}|^{2m}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\| k\text{-ta kolumna macierzy } [x_{ij}] \text{ operatora } X \text{ w bazie } (v_k) \|^2 \Big)^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} |x_{lk}|^2 \right)^m$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} |x_{kk}|^{2m} \geqslant \left| \sum_{k=1}^{n} x_{kk}^{2m} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\|k\text{-ta kolumna macierzy } [x_{ij}] \text{ operatora } X$$

$$\text{w bazie } (v_k)\|^2 \Big)^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} |x_{lk}|^2 \right)^m$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} |x_{kk}|^{2m} \geqslant \left| \sum_{k=1}^{n} x_{kk}^{2m} \right| = \left| \operatorname{tr} X^{2m} \right|.$$

Zadanie domowe

Dla operatora liniowego $X \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ istnieje baza ortonormalna (v_k) przestrzeni $\mathbb{C}^n$ w której macierz tego przekształcenia jest górnotrójkątna.

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\| k\text{-ta kolumna macierzy } [x_{ij}] \text{ operatora } X \text{ w bazie } (v_k) \|^2 \Big)^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} |x_{lk}|^2 \right)^m$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} |x_{kk}|^{2m} \geqslant \left| \sum_{k=1}^{n} x_{kk}^{2m} \right| = \left| \operatorname{tr} X^{2m} \right|.$$

Lemat

Dla operatora liniowego $X \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ zachodzi

$$\left| \operatorname{tr} X^{2m} \right| \leqslant \operatorname{tr} \left(X^\dagger X \right)^m, \qquad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Wniosek z nierówności $\left|\operatorname{tr} X^{2m}\right| \leqslant \operatorname{tr}\left(X^\dagger X\right)^m$

Lemat

Dla operatorów liniowych samosprzężonych $X, Y : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ zachodzi

$$\left|\operatorname{tr}(XY)^{2^m}\right| \leqslant \operatorname{tr}\left(X^{2^m} Y^{2^m}\right), \qquad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Wniosek z nierówności $\left|\operatorname{tr}(XY)^{2^m}\right| \leqslant \operatorname{tr}\left(X^{2^m}Y^{2^m}\right)$

Dla A, B — operatorów samosprzężonych kładziemy $X = I + \frac{1}{2^m}A$, $Y = I + \frac{1}{2^m}B$.

Wniosek z nierówności $\left|\operatorname{tr}(XY)^{2^m}\right| \leqslant \operatorname{tr}\left(X^{2^m}Y^{2^m}\right)$

Dla A, B — operatorów samosprzężonych kładziemy $X = I + \frac{1}{2^m}A$, $Y = I + \frac{1}{2^m}B$. Ufając, że

$$
\begin{aligned}
(XY)^{2^m} &= \left(\left(I + \frac{1}{2^m}A\right)\left(I + \frac{1}{2^m}B\right)\right)^{2^m} \\
&= \left(I + \frac{1}{2^m}(A+B) + \left(\frac{1}{2^m}\right)^2 AB\right)^{2^m} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} e^{A+B}, \\
X^{2^m}Y^{2^m} &= \left(I + \frac{1}{2^m}A\right)^{2^m}\left(I + \frac{1}{2^m}B\right)^{2^m} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} e^A e^B,
\end{aligned}
$$

Wniosek z nierówności $\operatorname{tr}(XY)^{2^m} \leqslant \operatorname{tr}\left(X^{2^m} Y^{2^m}\right)$

Dla A, B — operatorów samosprzężonych kładziemy $X = I + \frac{1}{2^m}A$, $Y = I + \frac{1}{2^m}B$. Ufając, że

$$\begin{aligned}
(XY)^{2^m} &= \left(\left(I + \frac{1}{2^m}A\right)\left(I + \frac{1}{2^m}B\right)\right)^{2^m} \\
&= \left(I + \frac{1}{2^m}(A+B) + \left(\frac{1}{2^m}\right)^2 AB\right)^{2^m} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} e^{A+B}, \\
X^{2^m} Y^{2^m} &= \left(I + \frac{1}{2^m}A\right)^{2^m}\left(I + \frac{1}{2^m}B\right)^{2^m} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} e^A e^B,
\end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\operatorname{tr} e^{A+B} \leqslant \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right).$$

Bibliografia

- S. Golden, *Lower Bounds for the Helmholtz Function*, Physical Review **137**, B1127–1128 (1965)
- B. Simon, *The statistical Mechanics of Lattice Gases*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press
- M. Suzuki, *Quantum Statistical Monte Carlo Methods and Applications to Spin Systems*, Journal of Statistical Physics **43**, 883–909 (1986)
- C. J. Thompson, *Inequality with Applications in Statistical Mechanics*, Journal of Mathematical Physics **6**, 1812–1813 (1965)

Dziękuję!

Pytania?