Rozkład figury symetrycznej na dwie przystające

Tomasz Tkocz

10 X 2010

Streszczenie

Tekst zawiera notatki do referatu z seminarium monograficznego *Wybrane zagadnienia geometrii*. Całość jest oparta na artykule [Woj]. Najpierw podamy kilka przykładów, a potem udowodnimy twierdzenie o nieistnieniu pewnego rozkładu figury środkowo symetrycznej.

1 Wstęp

Michał Wojciechowski[1] zajmował się takim zadaniem (Wiadomości Matematyczne XXIII (1980), str. 93, zadanie 273)

Udowodnić, że jeśli $\mathcal{F}$ jest figurą ograniczoną, zawartą w płaszczyźnie, mającą środek symetrii należący do tej figury, to $\mathcal{F}$ nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające.

Pokazał on, że teza zadania nie jest prawdziwa. Pokażemy to w rozdziale *Przykłady*. Ale także podał on naturalne wzmocnienie założeń, przy których teza zadania już zachodzi. Dotyczyć tego będzie rozdział *Twierdzenie o nieistnieniu rozkładu*.

Można się zastanawiać nad różnymi uogólnieniami tego zadania. Na przykład jak jest w wyższych wymiarach? Oczywiście kontrprzykłady się przeniosą (rozważając wszystko w dwuwymiarowej podprzestrzeni), natomiast sprawa nieistnienia odpowiedniego rozkładu wydaje się otwarta.

2 Przykłady

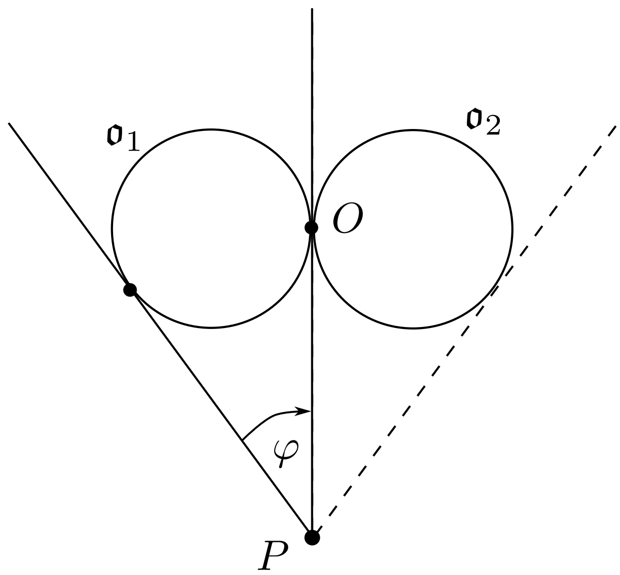
Pierwszym narzucającym się argumentem przemawiającym za tym, że cytowane zadanie ma szansę mieć prawdziwą tezę jest przypadek figury $\mathcal{F}$ składającej się ze skończenie wielu punktów. Wtedy, ponieważ jest ona środkowo symetryczna ze środkiem symetrii doń należącej, to $\mathcal{F}$ składa się z nieparzystej ilości punktów. Wtedy $\mathcal{F}$ z przyczyn mnogościowych nie rozłoży się na dwie rozłączne przystające części.

Zanim podamy kontrprzykład, zobaczmy, że jeśli izometria dwóch kawałków figury $\mathcal{F}$ już istnieje, to nie może być dowolna.

Stwierdzenie 1. *Jeśli $\mathcal{F}$ jest ograniczoną figurą środkowo symetryczną, powiedzmy względem O i istnieje rozkład $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ figury $\mathcal{F}$ na dwie rozłączne przystające części $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, to izometria ustalająca to przystawanie jest obrotem o środku różnym od O.*

Szkic dowodu. Wobec twierdzenia o klasyfikacji izometrii płaszczyzny wystarczy wykluczyć przypadek, że istniejąca izometria jest translacją, symetrią osiową lub symetrią z poślizgiem. Idea jest prosta. W każdym przypadku dostaniemy sprzeczność z ograniczonością figury $\mathcal{F}$, iterując odpowiednio tą izometrię (na środku symetrii O). Szczegóły zaś pomijamy. $\square$

[1] obecnie pracownik Zakładu Analizy Funkcjonalnej Instytutu Matematycznego PAN; referowana praca powstała, gdy był jeszcze w liceum, na konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki *Delty*



Rysunek 1: Konstrukcja kontrprzykładu

Przykład 1 (Teza zadania nie jest prawdziwa)**.** W kąt o wierzchołku P i mierze φ niewspółmiernej z π wpiszmy okrąg $\mathfrak{o}_1$, który niech będzie styczny do jednego z ramion kąta w punkcie O. Niech $\mathfrak{o}_2$ będzie obrazem okręgu $\mathfrak{o}_1$ w symetrii S względem punktu O. Tak wybierzmy orientację kąta φ, aby obrót R o kąt $\overrightarrow{\varphi}$ przeprowadzał $\mathfrak{o}_1$ na $\mathfrak{o}_2$. Określamy ciąg punktów

$$\begin{cases} A_1 = O \\ A_{n+1} = S \circ R(A_n) \end{cases}, \qquad B_n = R(A_n), \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Definiujemy $\mathcal{F} = \{A_n\} \cup \{B_n\}$ oraz oczywiście $\mathcal{F}_1 = \{A_n\}$, $\mathcal{F}_2 = \{B_n\}$. Zauważmy, że

1. $\mathcal{F}_2 = R(\mathcal{F}_1)$

2. Figura $\mathcal{F}$ jest ograniczona jako zawarta w $\mathfrak{o}_1 \cup \mathfrak{o}_2$, no bo mamy, że

   $$A_n \in \mathfrak{o}_1 \Longrightarrow R(A_n) \in \mathfrak{o}_2 \Longrightarrow A_{n+1} = SR(A_n) \in \mathfrak{o}_2,$$

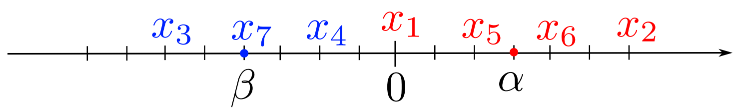
   więc $\mathcal{F}_1 = \{A_n\} \subset \mathfrak{o}_1$. Stąd od razu też $\mathcal{F}_2 \subset \mathfrak{o}_2$.

3. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ są rozłączne, bo $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathfrak{o}_1 \cap \mathfrak{o}_2 = \{0\}$, więc tylko O jest kandydatem na wspólny ich element. Ale to łatwo wykluczyć. Wiemy, że $O \in \mathcal{F}_1$, a gdyby $O \in \mathcal{F}_2$, to $O = B_k = R(A_k)$, dla pewnego k. Wtedy

   $$A_1 = O = S(O) = S(B_k) = SR(A_k) = (SR)^k(A_1),$$

   ale SR jest obrotem względem środka okręgu $\mathfrak{o}_1$ o kąt φ niewspółmierny z π. Nie może więc on mieć orbity zamkniętej. Tym samym teza Zadania jest nieprawdziwa.

   Jeśli dołączyć do $\mathcal{F}_1$ otwarty obszar ograniczony przez okrąg $\mathfrak{o}_1$, a do $\mathcal{F}_2$ — przez okrąg $\mathfrak{o}_2$, to dostaniemy przykład spójnej ograniczonej figury środkowo symetrycznej, którą można podzielić na dwa przystające rozłączne i spójne kawałki.



Rysunek 2: Przykład figury środkowo symetrycznej rozkładającej się na dwa kawałki też środkowo symetryczne

Przykład 2 (Rozkład figury środkowo symetrycznej na kawałki też środkowo symetryczne)**.** W tym przykładzie zobaczymy, że istnieje środkowo symetryczna figura ograniczona (zawarta nawet w prostej!) zawierająca swój środek symetrii, którą można rozłożyć na dwie środkowo symetryczne rozłączne części (już nie koniecznie zawierające swoje środki symetrii). Ale jak się za chwilę okaże nie mogą już one być przystające.

Ustalmy dwie liczby $\alpha > 0$ i $\beta < 0$ takie, że $\alpha < -\beta$. Określamy rekurencyjnie ciąg

$$x_1 = 0, \qquad x_{2n} = \begin{cases} 2\alpha - x_{2n-1}, & \text{gdy } x_{2n-1} \geqslant 0, \\ 2\beta - x_{2n-1}, & \text{gdy } x_{2n-1} < 0, \end{cases}, \qquad x_{2n+1} = -x_{2n}.$$

Niech $\mathcal{F} = \{x_n\}$. Mamy

1. $\mathcal{F}$ jest ograniczony, bo łatwo indukcyjnie sprawdzić, że $|x_n| \leqslant 2|\beta|$ (gdy $x_{2n-1} \in [2\beta, 0)$, to $x_{2n} \in (2\beta, 0]$, a gdy $x_{2n-1} \in [0, -2\beta]$, to $x_{2n} \in [2\alpha + 2\beta, 2\alpha] \subset (2\beta, -2\beta)$).

2. Figury $\mathcal{F}_1 = \{x_{2n}, x_{2n-1} \mid x_{2n-1} \geqslant 0\, n \geqslant 1\}$, $\mathcal{F}_2 = \{x_{2n}, x_{2n-1} \mid x_{2n-1} \geqslant 0\, n \geqslant 1\}$ są oczywiście rozłączne i dają w sumie $\mathcal{F}$. Są środkowo symetryczne względem α i β odpowiednio, gdyż, dla ustalenia uwagi powiedzmy dla $\mathcal{F}_1$, każdy element ciągu z nieparzystym indeksem z $\mathcal{F}_1$ ma symetrycznego względem α kolegę o następnym parzystym indeksie, z definicji, również w $\mathcal{F}_1$.

3. $\mathcal{F}$ jest symetryczną figurą względem $0 \in \mathcal{F}$, co wynika z warunku $x_{2n+1} = -x_{2n}$

Mamy więc przykład figury $\mathcal{F}$ środkowo symetrycznej zawierającej swój środek symetrii i ograniczonej, która rozkłada się na dwie rozłączne figury również środkowo symetryczne. Może się zdarzyć tak, że $\mathcal{F}$ będzie składała się ze skończenie wielu punktów, np. dla $\alpha = 3, \beta = -4$, por. Rysunek 2. Ponadto w przypadku, gdy ciąg (x_n) jest od pewnego miejsca stały, nie zawsze dostajemy to co chcieliśmy, por. np. $\alpha = 2$ i $\beta = -6$ (jest $x_1 1 <$, więc $x_1 1$ zaliczymy do $\mathcal{F}_2$, ale $x_1 6 = x_1 1$ i $x_1 5 > 0$, więc trzeba by $x_1 6$ zaliczyć do $\mathcal{F}_1$). Zbadanie tego, kiedy jest dobrze, w szczególności kiedy zbiór $\{x_n\}$ jest nieskończony, wydaje się trudne i pomijamy.

3 Twierdzenie o nieistnieniu rozkładu

Przykłady z ostatniego rozdziału są niejako wstępem do zapowiadanego twierdzenia o nieistnieniu rozkładu figury na dwie przystające rozłączne części. Otóż widzieliśmy, że dla ograniczonej figury środkowo symetrycznej, jeśli życzyć sobie od rozkładu na dwa rozłączne kawałki, aby były one tylko przystające (Przykład 1), albo tylko środkowo symetryczne (Przykład 2), to nie jest on zabroniony. Jeśli jednak zażądamy tych dwóch warunków na raz, to okazuje się, że nigdy to nie jest możliwe.

Twierdzenie 1. *Udowodnić, że jeśli $\mathcal{F}$ jest figurą ograniczoną, zawartą w płaszczyźnie, mającą środek symetrii należący do tej figury, to $\mathcal{F}$ nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające i środkowo symetryczne.*

Udowodnimy najpierw dwa lematy. Środek symetrii figury $\mathcal{F}$ oznaczamy przez $O_{\mathcal{F}}$. Zauważmy, że ograniczona figura ma co najwyżej jeden środek symetrii.

Lemat 1. *Jeśli ograniczona środkowo symetryczna figura $\mathcal{F}$ rozkłada się na dwie rozłączne środkowo symetryczne części $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, to punkty $O_{\mathcal{F}}$, $O_{\mathcal{F}_1}$, $O_{\mathcal{F}_2}$ są współliniowe.*

Dowód. Symetrię względem punktu X oznaczamy tradycyjnie przez S_X. Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Weźmy dowolny punkt $X_1 \in \mathcal{F}_1$ i rozważmy ciąg

$$X_{2n} = S_{O_{\mathcal{F}}}(X_{2n-1}), \qquad X_{2n+1} = S_{O_{\mathcal{F}_i}}(X_{2n}), \quad \text{gdy } X_{2n} \in \mathcal{F}_i, \text{ dla } i = 1, 2.$$

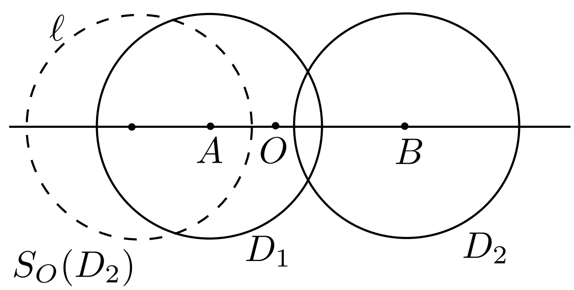
Zauważmy, że z konstrukcji tego ciągu mamy

$$\overrightarrow{X_{2n-1}X_{2n+1}} = \overrightarrow{X_{2n-1}\left(S_{O_{\mathcal{F}_i}}S_{O_{\mathcal{F}}}(X_{2n-1})\right)} = 2\overrightarrow{O_{\mathcal{F}}O_{\mathcal{F}_i}}.$$

Zatem iterując to, dla dowolnego m istnieją liczby k i l takie, że $k + l = m$ oraz

$$\overrightarrow{X_1X_{2m+1}} = 2k\overrightarrow{O_{\mathcal{F}}O_{\mathcal{F}_1}} + 2l\overrightarrow{O_{\mathcal{F}}O_{\mathcal{F}_2}}.$$

Ponieważ wektory $\overrightarrow{O_{\mathcal{F}}O_{\mathcal{F}_1}}$ i $\overrightarrow{O_{\mathcal{F}}O_{\mathcal{F}_2}}$ są liniowo niezależne, to długość wektora $\overrightarrow{X_1X_{2m+1}}$ dąży wraz z m do nieskończoności, co przeczy ograniczoności figury $\mathcal{F}$. □



Rysunek 3: W Lemacie 2 rozważamy dwa dyski D_1 i D_2 i łuk ℓ

Lemat 2. *Jeśli ograniczona środkowo symetryczna figura $\mathcal{F}$ rozkłada się na dwie rozłączne środkowo symetryczne części $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, które są przystające, to $O_{\mathcal{F}}$ jest środkiem odcinka $O_{\mathcal{F}_1}O_{\mathcal{F}_2}$.*

Dowód. Oznaczmy $O = O_{\mathcal{F}}$, $A = O_{\mathcal{F}_1}$ i $B = O_{\mathcal{F}_2}$. Gdy $A = B$, to jest to też środek symetrii figury $\mathcal{F}$, a że ma ona co najwyżej jeden, to $A = B = O$ i po zabawie.

Załóżmy więc dalej, że $A \neq B$. Gdyby teza nie była prawdziwa, to, powiedzmy, $OB > OA$. Określmy sobie *promień* naszych figur przez

$$r = \sup_{X \in \mathcal{F}_1} AX \stackrel{\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2}{=} \sup_{X \in \mathcal{F}_2} BX.$$

Niech D_1, D_2 będzie kołem o promieniu r i środku A, B, odpowiednio. Z definicji r oczywiście jest $\mathcal{F} \subset D_1 \cup D_2$. Ponieważ zakładamy, że $OB > OA$, to $S_O(\partial D_2)$ zawiera łuk ℓ większy od półokręgu. Skoro znajdzie się punkt $P \in \partial D_2$ będący granicą punktów z $\mathcal{F}_2$, to $S_O(P)$ lub $S_O(S_B(P))$ należy do ℓ (jest to łuk większy od półokręgu zawiera więc punkt lub jego symetryczny obraz względem środka okręgu), więc wraz z pewnym otoczeniem ten punkt wyłazi z $D_1 \cup D_2$, czyli z $\mathcal{F}$ i sprzeczność z jego symetrią względem O. $\square$

Dowód Twierdzenia 1. Niech f będzie izometrią ustalającą przystawanie $\mathcal{F}_2 = f(\mathcal{F}_1)$.

Po pierwsze, zauważmy, że $A \neq B$ (oznaczenia jak z dowodu Lematu 2). No bo w przeciwnym przypadku, $A = B = O$. Jeśli $A \in \mathcal{F}_1$, to $f(A) \in \mathcal{F}_2$ jest środkiem symetrii tej figury (bo A jest środkiem symetrii figury $\mathcal{F}_1$, zaś f jest izometrią!). Zatem $\mathcal{F}_2 \ni f(A) = B = A \in \mathcal{F}_1$ i sprzeczność z rozłącznością figur $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Podobnie rozumujemy, gdy $A \in \mathcal{F}_2$.

Po drugie, $S_O(\mathcal{F}_1) \neq \mathcal{F}_2$, bo w przeciwnym przypadku, skoro, powiedzmy, $O \in \mathcal{F}_1$, to też $O \in \mathcal{F}_2$ i sprzeczność z rozłącznością.

Zatem, po trzecie, istnieje $P \in \mathcal{F}_1$ taki, że też $S_O(P) \in \mathcal{F}_1$. Określamy ciąg punktów

$$P_1 = P, \qquad P_{2n} = S_O(P_{2n-1}), \qquad P_{2n+1} = S_A(P_{2n}).$$

Zauważmy, że $P_1, P_2 = S_O(P), P_3 = S_A(P_2) \in \mathcal{F}_1$. A ponieważ

$$S_B(P_{2n+4}) = S_B \underbrace{S_O S_A S_O}_{S_B}(P_{2n+1}) = S_B^2(P_{2n+1}) = P_{2n+1},$$

to indukcyjnie wnosimy, że nie może być $P_{2n+4} \in \mathcal{F}_2$, dla dowolnego n jest więc $\{P_n\} \subset \mathcal{F}_1$. Ale

$$P_{2(n+1)} = \underbrace{S_O S_A}_{\text{translacja o } \overrightarrow{OA}} (P_{2n}),$$

więc $\{P_{2n}\}$ jest nieograniczonym podzbiorem figury $\mathcal{F}_2$. Sprzeczność kończy dowód. $\square$

Na koniec proponujemy rozwiązać następujące zadanie, którego rozwiązanie można znaleźć w pracy [Woj].

Zadanie 1. Czy istnieje figura $\mathcal{F}$ ograniczona, osiowo symetryczna i taka, że do jej osi symetrii l należy dokładnie jeden punkt $O \in \mathcal{F}$ oraz dająca się rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych figur przystających.

Literatura

[Woj] M. Wojciechowski, *O pewnym rozkładzie figur środkowo symetrycznych*, Wiadomości matematyczne **XXVII** (1986), 75-80.