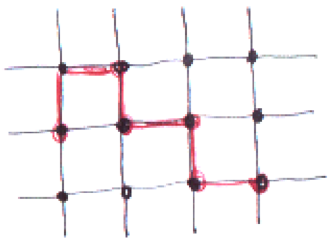
WSTĘP

Teoria perkolacji wyrosła z pytania „jeśli kamień zanurzymy w wodzie, czy woda przeniknie do jego środka?". (Z łac. percolare – filtrować). Zajmuje się więc ona zachowaniem spójnych klastrów w losowych grafach.

Podstawowym modelem jest krata $\mathbb{Z}^2$ i perkolacja krawędziowa (bond percolation). Na $\mathbb{Z}^2$ patrzymy jak na graf o wierzchołkach będących punktami kratowymi i krawędziach łączących wierzchołki różniące się o wersor którejś z osi. Krawędź może być otwarta lub zamknięta, każda niezależnie z prawdopodobieństwem p, $1-p$, odpowiednio. Kilka pojęć



- ścieżka, to ciąg (wierzchołek, krawędź, ...) gdzie wierzchołki są parami różne, krawędzie też
- dwa wierzchołki a, b są połączone jeśli istnieje ścieżka od a do b

- otwarta składowa spójności = otwarty klaster = maksymalny ze względu na inkluzję zbiór połączonych wierzchołków
- $C :=$ otwarty klaster zawierający 0
- Funkcja perkolacji $\theta^{(d)}(p) = \mathbb{P}_p(\underbrace{|C| = \infty}_{\text{zdarzenie}})$ zachodzi perkolacja

STW $\theta^{(d)}(p)$ – niemalejąca względem d $\left(\{|C_d| = \infty\} \subset \{|C_{d+1}| = \infty\}\right)$

STW $\theta^{(d)}(p)$ – niemalejąca względem p (argument $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{Z}^{d+1}$ ściągania miary $(\bigotimes_{\text{kraw.}} \mathcal{U}[0,1])$) na $[0,1]^{\text{krawędzi}}$

- prawdopodobieństwo krytyczne $p_c(d) := \inf\{p \mid \theta^{(d)}(p) > 0\}$

  – pierwszy moment w którym zachodzi perkolacja

STW. $\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d) \leq \frac{2}{3}$, $d \geq 2$ (tzn. funkcja perkolacji jest nietrywialna, p_c ma sens)

D-D. Np. z dołu

$$\theta(p) \underset{\forall n}{\leq} \mathbb{P}_p(\text{liczba ścieżek z } 0 \text{ dł. } n \geq 1) \leq \sum_{j \geq 1}^{\text{liczba ścieżek}} \mathbb{P}_p(j\text{-ta ścieżka dł. } n \text{ otw.})$$

liczba ścieżek z 0 dł. n $\leq \underbrace{2d}_{\text{pierwszy wybór dowolny}}\underbrace{(2d-1)^{n-1}}_{\text{potem się nie wracamy}}$

$$\leq 2d(2d-1)^{n-1} p^n = \frac{2d}{2d-1}\left(p(2d-1)\right)^n$$

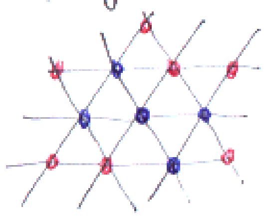
i gdy $p < \frac{1}{2d-1}$ to prawa strona $\to 0$, więc $\theta(p) = 0$ dla $p < \frac{1}{2d-1}$, więc $p_c > \frac{1}{2d-1}$.

Główny rezultat to

TW (Kesten, 1980) $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

KONFOREMNE NIEZMIENNIKI

Przejdźmy do perkolacji wierzchołkowej (site percolation) na kracie trójkątnej.



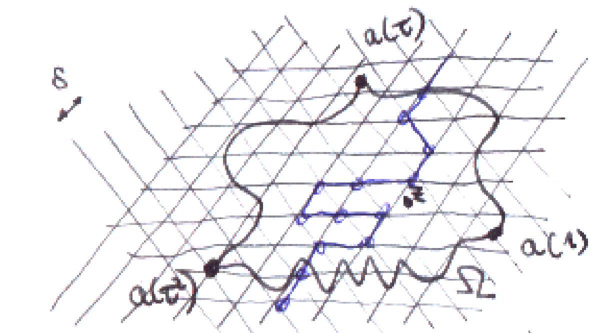
Każdy wierzchołek jest pomalowany na niebiesko lub czerwono z prawdopodobieństwem p, ~~lub~~ $1-p$ odpowiednio.

TW. Prawdopodobieństwo krytyczne w perkolacji wierzchołkowej na kracie trójkątnej wynosi $p_c = \frac{1}{2}$.

Dalej przyjmujemy $p = p_c = \frac{1}{2}$.

Ozn. $\tau = e^{2\pi i/3}$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ to obszar jednospójny konforemnie równoważny trójkątowi z dostępnymi wierzchołkami $a(1), a(\tau), a(\tau^2)$ (ponumerowanych przeciwnie do ruchu wskazówek zegara)



Ω - jednospójny $\underset{\text{konf}}{\cong}$ trójkąt

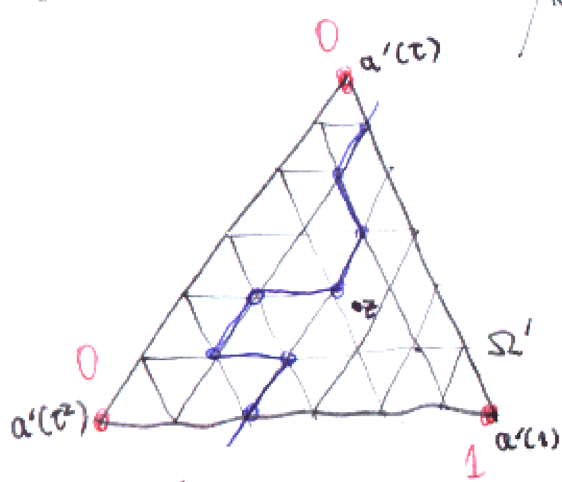
Rys dla $\alpha = 1$.

Dla ustalonego $\alpha \in \{1, \tau, \tau^2\}$ definiujemy

$$H^\delta_\alpha(z) := \mathbb{P}(Q_\alpha(z)),$$

$Q_\alpha(z)$ = istnieje ścieżka łącząca łuki $\overset{\frown}{a(\alpha)a(\alpha\tau)}$ z $\overset{\frown}{a(\tau^2\alpha)a(\alpha)}$ i oddzielająca z od łuku $\overset{\frown}{a(\alpha\tau)a(\alpha^2\tau)}$

Φ konforemne



h'_α = liniowa

⚠ $H^\delta_\alpha(z)$ - f-cja stała na trójkątach sieci

! ⚠ $H^\delta_\alpha(z)$ = crossing-prob. na prostokąta $\overset{\frown}{a(\alpha\tau^2)a(\alpha)}$

$h'_\alpha(z) :=$ liniowa i 0 w $a'(\alpha\tau)$ i $a'(\alpha\tau^2)$ oraz 1 w $a'(\alpha)$

$h_\alpha :=$ pull-back $h'_\alpha = h'_\alpha \circ \Phi$

TW. $H^\delta_\alpha \xrightarrow[\text{jednostajnie na } \Omega]{\delta \to 0} h_\alpha$

W szczególności

Główny wynik. Po co? Nie wiem, ktoś mógłby opowiedzieć

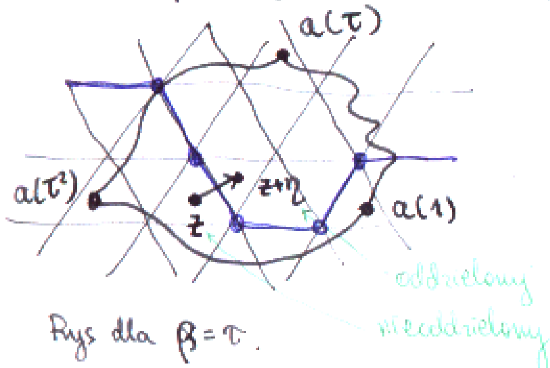
$h_\alpha(z)$ = konforemny niezmiennik $(a(1), a(\tau), a(\tau^2), z, \Omega)$.

Idea: pokazać, że H^δ_α zbiega do f-cji holo na Ω, wydedukować jakie warunki Dirichleta-Neumanna spełnia granica i porównać z h_α (jednoznaczność rozwiązania)

DOWÓD TWIERDZENIA

Niech z to środek trójkąta sieci, η - wektor łączący go ze środkiem trójkąta sąsiadującego. Oznaczamy

$$P_\beta(z,\eta) = \mathbb{P}(Q_\beta(z+\eta) \setminus Q_\beta(z))$$



Rys dla $\beta=\tau$.

LM 1. $P_\beta(z,\eta) = P_{\tau\beta}(z,\tau\eta)$

($\frac{2\pi}{3}$ - Cauchy-Riemann equations)

⚠ Skąd nazwa?

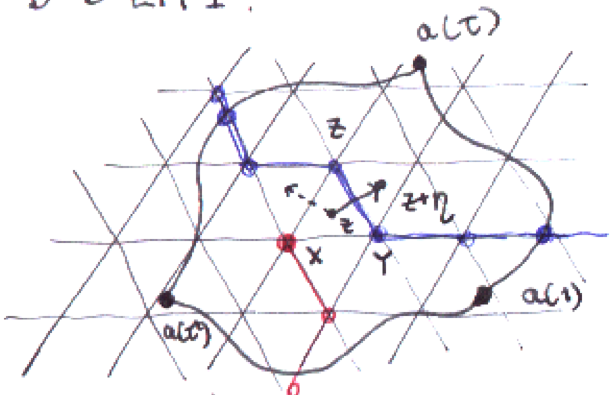
$$\frac{\partial}{\partial\eta} H_\beta(z) := H_\beta(z+\eta) - H_\beta(z) = \mathbb{P}(Q_\beta(z+\eta)) - \mathbb{P}(Q_\beta(z))$$
$$= \mathbb{P}(Q_\beta(z+\eta)) - \mathbb{P}(Q_\beta(z+\eta)\cap Q_\beta(z)) + (\mathbb{P}(Q_\beta(z)) - \mathbb{P}(Q_\beta(z+\eta)\cap Q_\beta(z)))$$
$$= \mathbb{P}(Q_\beta(z+\eta) \setminus Q_\beta(z)) - \mathbb{P}(Q_\beta(z)\setminus Q_\beta(z+\eta))$$
$$= P_\beta(z,\eta) - P_\beta(z+\eta,-\eta)$$
$$\overset{\text{lm 1.}}{=} P_{\tau\beta}(z,\tau\eta) - \underbrace{P_{\tau\beta}(z+\eta,-\tau\eta)}_{\substack{\text{SS } O(\delta^{1+\varepsilon}) \\ P_{\tau\beta}(z+\tau\eta)}} = P_{\tau\beta}(z,\tau\eta) - P_{\tau\beta}(z+\tau\eta,-\tau\eta) + O(\delta^{1+\varepsilon})$$
$$= \frac{\partial}{\partial(\tau\beta)} H_{\tau\beta}(z) + O(\delta^{1+\varepsilon})$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial\eta} H_\beta(z) = \frac{\partial}{\partial(\tau\beta)} H_{\tau\beta}(z) + O(\delta^{1+\varepsilon}), \quad \beta\text{-dow.}$$

– w granicy mamy à la równania C-R. dla trójki: $(H_1, H_\tau, H_{\tau^2})$.

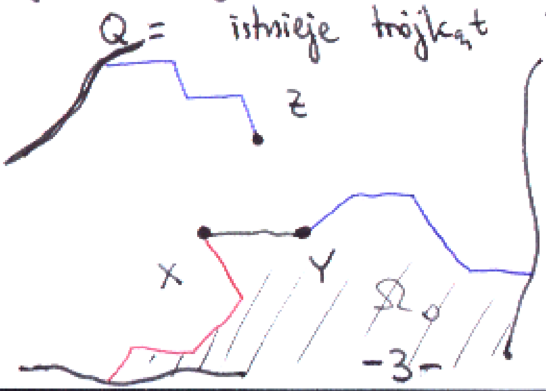
D-D LM 1.



X - musi być czerwony

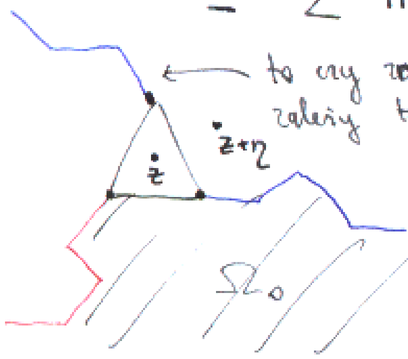
$Q := Q_\beta(z+\eta) - Q_\beta(z)$

1. Istnieją ścieżki od Y, Z do boków – niebieskie
2. Istnieje czerwona ścieżka z X do boku $a(\alpha\tau^2)\,a(\alpha)$ (inaczej $Q_\beta(z)$ by zachodziło)
3. Zatem Q = istnieje trójkąt XYZ i ścieżki



$$\mathbb{P}(Q) = \sum_{z\,z\ \text{nieb}} \mathbb{P}(Q \mid \underset{\text{w } \Omega_0 \text{ coś}}{\underset{\|}{\text{ustalony układ ścieżek w } \Omega_0}})\ \mathbb{P}(\text{w } \Omega_0 \text{ coś})$$

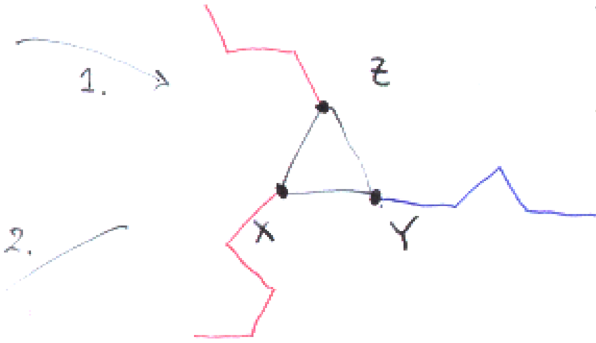
$$\overset{1.}{=} \sum_{z\,z\ \text{czer}} \mathbb{P}(\tilde{Q}_{\leftarrow} \mid \text{w } \Omega_0 \text{ coś})\ \mathbb{P}(\text{w } \Omega_0 \text{ coś})$$

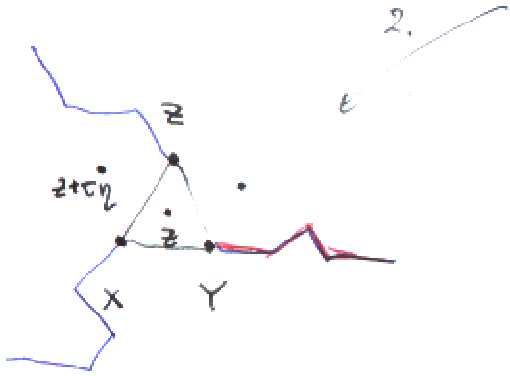


to czy znajdzie się ta ścieżka zależy tylko od krawędzi spoza Ω_0

istnieje z z czerwona ścieżka

$$= \mathbb{P}(\tilde{Q}) \overset{2.}{=} \mathbb{P}\left((\tilde{Q})^{\text{odwróć kolory}}\right) = P_{\tau\beta}(z, \tau\eta)$$





$\square$

LM2. (a) $\exists\ \varepsilon, C$ zależne tylko od Ω, że H_β – ε, C– Hölderowska

(b) $H_\beta \big|_{\widehat{a(\tau\beta)\,a(\tau^2\beta)}} = 0$, $\quad H_\beta(a(\beta)) \longrightarrow 1$.

D-D. 1. Do ud $\quad |H_\beta(z') - H_\beta(z)| \leq C|z'-z|^\varepsilon$

$$\| $$

$$\mathbb{P}(Q_\beta(z') \setminus Q_\beta(z)) - \mathbb{P}(Q_\beta(z) \setminus Q_\beta(z'))$$

żeby $\neq 0$ dokładnie jedno ze zdarzeń $Q_\beta(z)$, $Q_\beta(z')$ musi zajść

$\Downarrow$

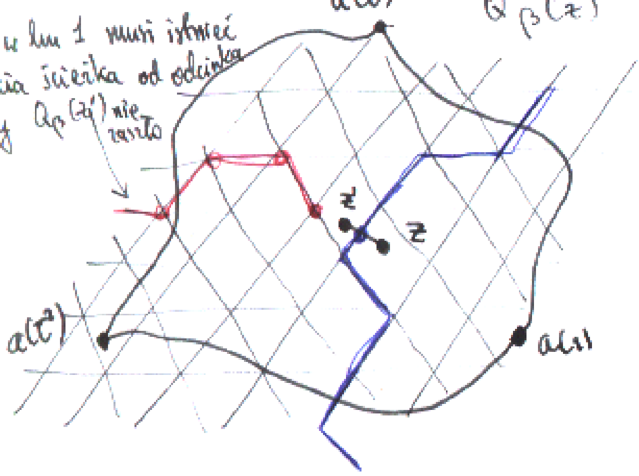
istnieją monochrom ścieżki

$\Downarrow$

wyst dla z', z bliskich na raz ustalonego trójk

bwo $|z-z'| \leq 1$

jak w lm 1 musi istnieć trzecia ścieżka od odcinka żeby $Q_\beta(z')$ nie zaszło



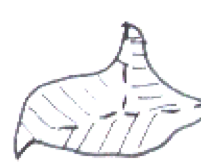
wyst dla z', z obu dalekich od ~~ustalonego~~ blisko któregoś trójk pewnego

~~$|H(z') - H(z)|$~~

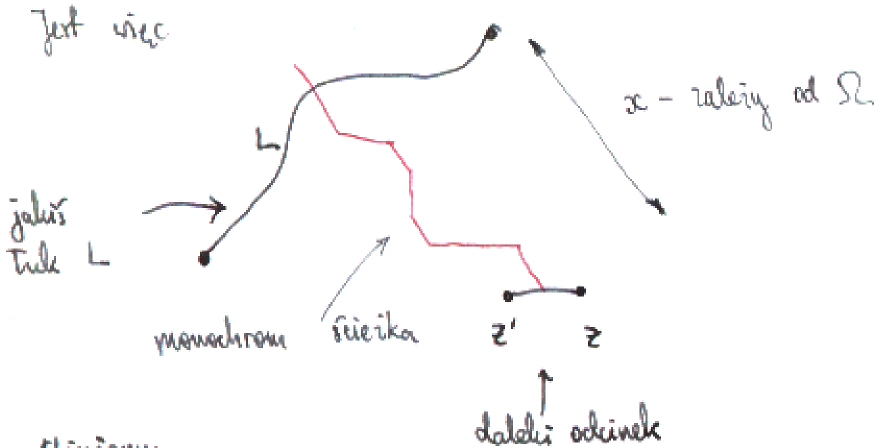
~~$\leq |H(z') - H(z_0)| + |H(z) - H(z_0)|$~~

~~$\leq C(|z'-z_0|^\varepsilon + |z-z_0|^\varepsilon)$~~

~~$\leq C \cdot 2^{1-\varepsilon} |z'-z|^\varepsilon$~~

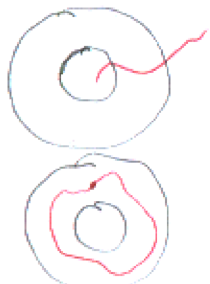


Jest więc



otrzymujemy

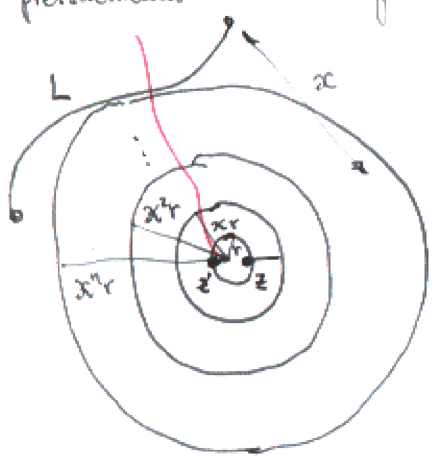
Tw (Russo) Dany jest pierścień o $\frac{R}{r} = x$ na kracie trójkątnej. Wtedy $\exists\, 0<p<q<1$ - zależne tylko od x (nie od $R, r, \delta, \dots$)



$\mathbb{P}$(istnieje ścieżka przecinająca) $\in [p,q]$

$\mathbb{P}$ (istnieje zamknięta ścieżka wew.) $\in (p,q)$

Odcinek $[zz']$ można od Tuku L oddzielić co najmniej $|\log|z'-z|| + c$ pierścieniami rozłącznymi. Zatem



$$|H_\beta(z') - H_\beta(z)| = |\mathbb{P}(Q_\beta(z) - Q_\beta(z'))|$$

$\le \mathbb{P}$(ist ścieżka) $\le \mathbb{P}$(ścieżka przecina $c + |\log|z'-z||$ pierś.)

$$\le q^{|\log|z'-z||+c}$$

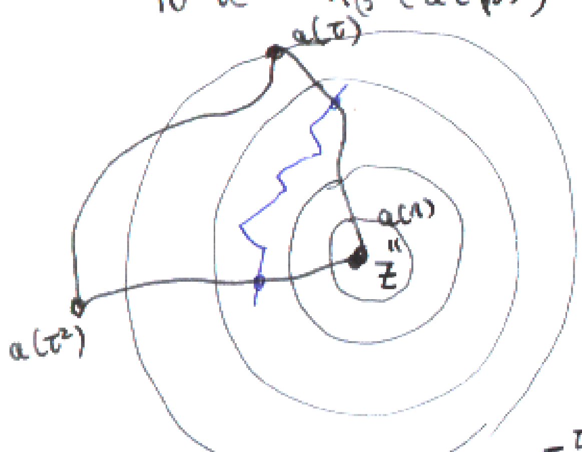
$$= q^c\, |z'-z|^{|\log q|}.$$

$x^n r \le x$ $\sim |z'-z|$

$$n \le \frac{\log x - \log r}{\log x} \approx c + |\log|z'-z||$$

(b) To że $H_\beta|_{a(\tau\beta)\frown a(\tau^2\beta)} = 0$ jest ⊙⊙

To że $H_\beta(a(\beta)) \longrightarrow 1$ wynika z tw. Russo.



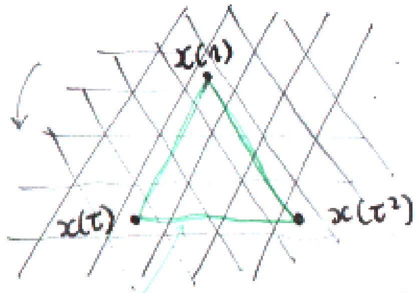
$\mathbb{P}(Q_\beta(a(1))) \ge \mathbb{P}(\exists$ pierś zaw ścieżkę zamk.)

$= 1 - \prod \mathbb{P}$(pierś nie zawiera ścieżki)

$\underset{\text{tw R.}}{\ge} 1 - \prod (1-p) \ge 1 - (1-p)^{|\log \delta| + c}$ x.

$$\xrightarrow[\delta \to 0]{} 1. \ \square$$

Teraz zdefiniujemy całkę dyskretną.



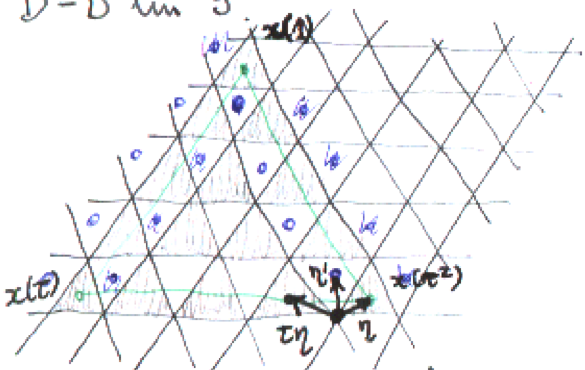
$$\oint_\Gamma^\delta H(z)\,dz = \delta \sum_{z\in x(\tau)x(\tau^2)} H(z) + \delta\tau \sum_{x(\tau^2)x(1)} H(z) + \delta\tau^2 \sum_{x(1)x(\tau)} H(z).$$

kontur Γ = trójkąt równoboczny o wierz. w środkach trójkątów kraty i podstawie || do osi rzecz.

LM3 $\Gamma \subset \Omega$ - równoboczny kontur dł l. Wted

$$\oint_\Gamma^\delta H_\beta(z)\,dz = \frac{1}{\tau}\int_\Gamma^\delta H_{\tau\beta}(z)\,dz + O(l\delta^\varepsilon).$$

D-D lm 3



$\mathcal{B}$ - zbiór środków czarnych Δ

$\mathcal{W}$ - — || — białych Δ

$$\cancel{\sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(1)x(\tau^2)} \left(H_\beta(z+\eta) - H_\beta(z)\right) \overset{\triangle\text{ po lm 1}}{=} \sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(1)x(\tau^2)} \left(P_\beta(z,\eta) - P_\beta(z+\eta,-\eta)\right)}$$

$$\cancel{\overset{\text{lm 1}}{=} \sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(1)x(\tau^2)} \left(P_{\tau\beta}(z,\tau\eta) - P_{\tau\beta}(z+\eta,-\tau\eta)\right)}$$

$$\cancel{= \sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(1)x(\tau^2)} \left(P_{\tau\beta}(z,\tau\eta) - P_{\tau\beta}(z+\tau\eta,-\tau\eta)\right)}$$

O(δ^ε) z Höldera

$$\sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(1)x(\tau^2)} \left(H_\beta(z+\eta) - H_\beta(z)\right) \underset{O(\delta^\varepsilon)}{\overset{\text{lm2}}{\leq}} = \sum \left(P_\beta(z,\eta) - P_\beta(z+\eta,-\eta)\right)$$

$$\underset{\text{lm 1}}{=} \sum \left(P_{\tau\beta}(z,\eta) - P_{\tau\beta}(z+\eta,-\tau\eta)\right)$$

$$= \sum \left(P_{\tau\beta}(z,\eta) - P_{\tau\beta}(z+\tau\eta,-\tau\eta)\right) + \boxed{\text{różnica}} \sim O(l\delta^{\varepsilon-1})$$

$\overset{\shortparallel}{\frac{2l}{\delta}}$ skł rzędu $O(\delta^\varepsilon)$

$$= \sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(1)x(\tau^2)} \left(H_{\tau\beta}(z+\tau\eta) - H_{\tau\beta}(z)\right) + O(l\delta^{\varepsilon-1}).$$

Podobnie

$$\sum_{z\in\mathcal{W}} \left(H_\beta(z+\eta') - H_\beta(z)\right) = \sum_{z\in\mathcal{W}} \left(H_{\tau\beta}(z+\tau\eta') - H_{\tau\beta}(z)\right) + O(l\delta^{\varepsilon-1})$$

Rachujemy $(\alpha \in \{1,\tau,\tau^2\})$

$$\sum_{z\in x(\alpha)x(\tau^2\alpha)} H_\beta(z) - \sum_{z\in x(\tau\alpha)x(\tau^2\alpha)} H_\beta(z)$$

$$\underset{\text{telescoping}}{=} \sum_{z\in \mathcal{B}\setminus x(\alpha)x(\tau^2\alpha)} \big(H_\beta(z+\eta)-H_\beta(z)\big) + \sum_{z\in W}\big(H_\beta(z+\eta')-H_\beta(z)\big) \quad ☺$$

$$\sum_{W} H_\beta(z) \qquad \sum_{\mathcal{B}\setminus x(\tau\alpha)x(\tau^2\alpha)} H_\beta(z)$$

$$\underset{\text{powyższe}}{=} \sum_{z\in\mathcal{B}\setminus x(\alpha)x(\tau^2\alpha)} \big(H_{\tau\beta}(z+\tau\eta) - H_{\tau\beta}(z)\big) + \sum_{z\in W}\big(H_{\tau\beta}(z+\tau\eta')-H_{\tau\beta}(z)\big) + O(\ell\delta^{\varepsilon-1})$$

$$\underset{\text{telescoping}}{=} \sum_{x(\alpha)x(\tau^2\alpha)} H_{\tau\beta}(z) - \sum_{x(\tau\alpha)x(\tau^2\alpha)} H_{\tau\beta}(z) + O(\ell\delta^{\varepsilon-1}).$$

Przyp. def.
$$\oint_\Gamma H = \delta\sum_{x(\tau)x(\tau^2)} H + \underbrace{\delta\tau}_{\frac{-1+i\sqrt3}{2}} \sum_{x(\tau^2)x(1)} H + \underbrace{\delta\tau^2}_{\frac{-1-i\sqrt3}{2}}\sum_{x(1)x(\tau)} H$$

$$-\frac{\delta}{2}\,☺\Big|_{\alpha=1} \quad -\frac{i\sqrt3}{2}\delta\,☺\Big|_{\alpha=\tau} \quad +\frac{\delta}{2}\,☺\Big|_{\alpha=\tau^2} \qquad /+$$

$$O(\ell\delta^{\varepsilon})$$

$$\Downarrow\ \delta\to 0$$

$$\oint_\Gamma H_\beta = \frac{1}{\tau}\oint_\Gamma H_{\tau\beta} + O(\ell\delta^\varepsilon).\ \square$$

Z lm 2 $\{H^\delta\}$ są jednakowo ~~jednostajnie~~ ciągłe, są wsp ogr przez 1, więc można wybierać podciąg zbieżny (jednostajnie). Wystarczy zatem udowodnić, że

LM 4 (kończący) Jeśli na pewnym podciągu $H^{\delta_j}_\alpha \rightrightarrows f_\alpha$, to $f_\alpha \equiv h_\alpha$.

D-D tw z lm 4. Gdyby $H^\delta \not\rightrightarrows h_\alpha$, to na pewnym podciągu jest $>\varepsilon$. Z niego wybieramy podciąg zb. i lm. 4 kończy sprzecznością.

D-D lm 4. Z lm 3

$$\oint_\Gamma f_\beta = \oint_\Gamma \frac{1}{\tau} f_{\tau\beta} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \oint_\Gamma f_\alpha &= \oint_\Gamma \underbrace{\tfrac{1}{\tau}}_{\tau^2} f_{\tau\alpha} \\ \oint_\Gamma f_{\tau\alpha} &= \oint_\Gamma \underbrace{\tfrac{1}{\tau}}_{\tau^2} f_{\tau^2\alpha} \end{aligned} \quad \Big|\cdot \tau^2+\frac{i}{\sqrt3} \quad /+$$

$$\oint_\Gamma f_\alpha = \oint\Big(\tau^2\big(\tau^2+\frac{i}{\sqrt3}\big) f_{\tau^2\alpha} - \frac{i}{\sqrt3} f_{\tau\alpha}\Big) \Rightarrow \cancel{\oint_\Gamma f_\alpha}$$

$$\tau + \frac{-1-i\sqrt3}{2}\cdot\frac{i}{\sqrt3} = \frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt3}{2} - \frac{i}{2\sqrt3}+\frac{1}{2} = \frac{i}{\sqrt3}$$

więc

$$\oint_\Gamma \left(f_\alpha + \frac{i}{\sqrt{3}} \left(f_{\tau\alpha} - f_{\tau^2\alpha} \right) \right) = 0.$$

$$\Downarrow \text{ Morera}$$

$f_\alpha + \frac{i}{\sqrt{3}} \left(f_{\tau\alpha} - f_{\tau^2\alpha} \right)$ – analityczna $\Rightarrow$

f_α, $\frac{1}{\sqrt{3}} \left(f_{\tau\alpha} - f_{\tau^2\alpha} \right)$ – analityczne sprzężone

$\overset{\Longrightarrow}{\text{sprawdzenie}}$ f_α na $\partial\Omega$ spełnia to samo co h_α

mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions.

$\square$