TWIERDZENIE OSELEDECA I WYKŁADNIKI LAPUNOWA

TOMASZ TKOCZ

Streszczenie. Tekst zawiera notatki do referatu z seminarium monograficznego *Układy dynamiczne*. Jest to w zasadzie tłumaczenie odpowiedniego paragrafu artykułu [Ru] dotyczącego multiplikatywnego twierdzenia ergodycznego, tzw. twierdzenia Oseledeca. Głosi ono istnienie wykładników Lapunowa. Najpierw podamy heurystyczne podejście do wykładników Lapunowa, a potem zajmiemy się dowodem twierdzenia Oseledeca.

1. Zajawka

Rozważmy gładkie przekształcenie $f\colon U \longrightarrow R$ otwartego odcinka $U \subset \mathbb{R}$. Niech $I \in U$ będzie odcinkiem infinitezymalnej długości. Zastanówmy się jaka jest długość odcinka będącego jego n-krotną iteracją. Wynosi ona

$$|f^n(I)| \approx |(f^n)'(x)| \cdot |I|,$$

gdzie wybrano pewien punkt $x \in I$. Zatem jeśli istnieje granica $\lambda := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x)|$, to widzimy, że długość naszego odcinka rośnie wykładniczo, tzn.

$$|f^n(I)| \approx |(f^n)'(x)|^n \cdot |I| \approx e^{n\lambda}|I|.$$

Oznacza to, że tak zdefiniowane λ mierzy jak bardzo rozbiegają się infinitezymalnie bliskie punkty (końce odcinka I). Pomiaru zaś dokonujemy jak gdyby wzdłuż trajektorii f, gdyż z reguły łańcuchowej mamy $|(f^n)'(x)| = \Pi_{k=1}^n |f'(f^{n-k}(x))|$. Ten współczynnik λ nazywamy **wykładnikiem Lapunowa** przekształcenia f w punkcie x.

Podaną wyżej definicję można rozszerzyć na przekształcenie $f\colon M \longrightarrow M$ będące dyfeomorfizmem rozmaitości M. Por. wniosek 1.

2. Twierdzenie Oseledeca

Niech $f\colon M \longrightarrow M$ będzie dyfeomorfizmem d wymiarowej, zwartej i gładkiej rozmaitości M. Załóżmy, że na M mamy miarę probabilistyczną μ i przekształcenie f ją zachowuje. Przypomnijmy, że zachodzi wzorek

$$D(f^n)_x = Df_{f^{n-1}(x)} \circ Df_{f^{n-2}(x)} \circ \ldots \circ Df_{f(x)} \circ Df_x.$$

Motywowani nim, dla mierzalnego przekształcenia $M \ni x \overset{T}{\longmapsto} T_x \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ z rozmaitości M w macierze kwadratowe $d \times d$ o współczynnikach rzeczywistych (o których oczywiście myślimy jak o endomorfizmach $\mathbb{R}^d$) określamy

$$T_x^{(n)} := T_{f^{n-1}(x)} \circ T_{f^{n-2}(x)} \circ \ldots \circ T_{f(x)} \circ T_x.$$

Zachodzi twierdzenie, które jest naszym głównym celem

Twierdzenie 1 (Oseledec)**.** *Jeśli* $(x \longmapsto \ln_+ \|T_x\|) \in L_1(M, \mu)$, *to istnieje zbiór mierzalny* $X \subset M$ *pełnej miary, niezmienniczy w przód, tzn.* $f(X) \subset X$ *taki, że dla każdego* $x \in X$ *zachodzi*

(1) $\left(\left(T_x^{(n)}\right)^T T_x^{(n)}\right)^{\frac{1}{2n}} \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} \Lambda_x$ *dla pewnego przekształcenia* $\Lambda_x \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$,

(2) *jeśli oznaczymy wszystkie wartości własne przekształcenia* Λ_x *przez* $e^{\lambda_1(x)} < \ldots < e^{\lambda_{s(x)}(x)}$ *oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne przez* $U_1(x), \ldots, U_{s(x)}(x)$, *które są wymiarów* $m_1(x), \ldots, m_{s(x)}(x)$ *odpowiednio, to funkcje* $x \longmapsto \lambda_r(x)$, $x \longmapsto m_r(x)$, *dla* $r = 1, \ldots, s(x)$ *są mierzalne i* f *niezmiennicze, a ponadto*

$$\frac{1}{n} \ln \|T_x^{(n)} u\| \longrightarrow \lambda_r(x),$$

dla $u \in V_r(x) \setminus V_{r-1}(x)$, *gdzie oczywiście oznaczamy* $V_r(x) := \sum_{j\leqslant r} U_j(x)$.

Zanim zaczniemy je pracowicie dowodzić zauważmy, że punkt *(2)* gwarantuje, że definicja wykładników Lapunowa w ogólnej sytuacji ma sens. Mianowicie mamy wniosek

Wniosek 1. *Jeśli* $(x \longmapsto \ln_+ \|Df_x\|) \in L_1(M, \mu)$*, to dla prawie każdego* $x \in M$ *istnieje dla dowolnego* $u \in \mathbb{R}^d$ *wykładnik Lapunowa przekształcenia* f *w punkcie* x *i kierunku* u

$$\chi(x, u) := \lim \frac{1}{n} \|D(f^n)_x u\|.$$

3. Dowód twierdzenia Oseledeca

Będzie nam potrzebne podaddytywne twierdzenie ergodyczne. Przypomnijmy je (dowód można znaleźć np. w [St]).

Twierdzenie 2 (Kingman)**.** *Niech* (M, μ) *będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną zachowywaną przez przekształcenie* $f\colon M \longrightarrow M$ *oraz* $(g_n)_{n>0}$ *ciągiem przekształceń mierzalnych* $M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*. Jeśli* $g_1^+ \in L_1(M, \mu)$*, a ponadto*

$$g_{m+n} \leqslant g_m + g_n \circ f^m, \qquad p.w.,$$

to istnieje funkcja $g\colon M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *o części dodatniej z* $L_1(M, \mu)$ $(g_+ \in L_1)$ *taka, że*

$$\frac{1}{n} g_n \xrightarrow{p.w.} g.$$

Dzięki niemu zaraz sprowadzimy dowód twierdzenia Oseledeca do sytuacji w ustalonym punkcie, czyli do dowodu poniższego twierdzenia z algebry liniowej. Będziemy dalej korzystać z algebry zewnętrznej przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^d$. Niezbędne rzeczy dotyczące tego pojęcia można znaleźć w dodatku na końcu notatek.

Twierdzenie 3 (o macierzach)**.** *Niech* $(T_n)_{n>0}$ *będzie ciągiem macierzy kwadratowych* $d \times d$ *o współczynnikach rzeczywistych takich, że*
(a) $\overline{\lim} \frac{1}{n} \ln \|T_n\| \leqslant 0$
(b) $\lim \frac{1}{n} \ln \|(T^{(n)})^{\wedge q}\|$ *istnieje dla każdego* $q = 1, \ldots, d$*, gdzie oznaczamy* $T^{(n)} = T_n \ldots T_1$*.*
Wtedy

(1) $\left(\left(T^{(n)}\right)^T T^{(n)}\right)^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow{\|\cdot\|} \Lambda$ *dla pewnego przekształcenia* $\Lambda \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$*,*

(2) *jeśli oznaczymy wszystkie wartości własne przekształcenia* Λ *przez* $e^{\lambda_1} < \ldots < e^{\lambda_s}$ *oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne przez* $U_1, \ldots, U_s$*, to*

$$\frac{1}{n} \ln \|T^{(n)} u\| \longrightarrow \lambda_r,$$

dla $u \in V_r \setminus V_{r-1}$ *i* $r = 1, \ldots, s$*, gdzie oczywiście oznaczamy* $V_0 := \{0\}$*,* $V_r := \sum_{j \leqslant r} U_j$*.*

Dowód twierdzenia 1 via twierdzenie 3. Wystarczy wobec twierdzenia 3 znaleźć zbiór pełnej miary $X \subset M$ taki, że dla każdego x z tego zbioru, jeśli określimy $T_n := T_{f^{n-1}(x)}$, to zachodzą założenia twierdzenia 3.

Z twierdzenia ergodycznego istnieje zbiór pełnej miary $X_0 \subset M$ taki, że dla każdego $x \in X_0$

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \ln_+ \|T_{f^j(x)}\| \longrightarrow \mathbb{E}_\mu \left(y \mapsto \ln_+ \|T_y\| | \sigma \text{ - ciało zbiorów prawie niezmienniczych}\right)(x)$$

Stąd

$$\frac{1}{n} \ln_+ \|T_{f^{n-1}(x)}\| = S_n(x) - \frac{n-1}{n} S_{n-1}(x) \longrightarrow 0,$$

więc

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \ln \|T_{f^{n-1}(x)}\| \leqslant 0.$$

Założenie *(a)* mamy tym samym odfajkowane.

Sprawdzimy teraz założenie *(b)*. Ustalmy $1 \leqslant q \leqslant d$. Rozważmy ciąg funkcji

$$g_n(x) := \ln \left\|(T_x^{(n)})^{\wedge q}\right\|.$$

Zauważmy, że spełnia on założenia podaddytywnego twierdzenia ergodycznego 2. Istotnie $g_1^+ \in L_1$, bo

$$g_1^+(x) = \ln_+ \left\|(T_x)^{\wedge q}\right\| \leqslant \ln_+ \|T_x\|^q \leqslant q \ln_+ \|T_x\| \in L_1,$$

na mocy założenia twierdzenia. Co więcej, $g_{m+n} \leqslant g_m + g_n \circ f^m$, gdyż na normach mamy nierówność multiplikatywną $\left\|\left(T_x^{(m+n)}\right)^{\wedge q}\right\| \leqslant \left\|\left(T_x^{(m)}\right)^{\wedge q}\right\| \cdot \left\|\left(T_{f^m(x)}^{(n)}\right)^{\wedge q}\right\|$, a po zlogarytmowaniu to co trzeba. Zatem istnieje zbiór pełnej miary X_q, że dla $x \in X_q$ istnieje

$$\lim \frac{1}{n} g_n(x) = \lim \frac{1}{n} \ln \left\|(T_x^{(n)})^{\wedge q}\right\|.$$

Biorąc zatem $X := X_0 \cap X_1 \cap \ldots \cap X_d$ widzimy, że jest dobrze, tzn. tak jak chcieliśmy na początku dowodu, aby dla każdego x z tego zbioru pełnej miary zachodziły założenia twierdzenia 3 dla T_n zdefiniowanego jako $T_{f^{n-1}(x)}$. $\square$

Pozostaje już tylko udowodnić twierdzenie o macierzach — twierdzenie 3.

4. Dowód twierdzenia o macierzach

Dowód twierdzenia 3. Oznaczmy przez $t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_d^{(n)}$ wartości własne przekształcenia $|T^{(n)}| = \left(\left(T^{(n)}\right)^T T^{(n)}\right)^{1/2}$ (użyliśmy tutaj oznaczenia $|T^{(n)}|$ na tzw. moduł przekształcenia liniowego; pojęcie to jest wyjaśnione w dodatku). Z założenia istnieje

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left\|\left(T^{(n)}\right)^{\wedge q}\right\| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left\||T^{(n)}|^{\wedge q}\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(t_d^{(n)} \cdot \ldots \cdot t_{d-(q-1)}^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{q-1} \ln t_{d-j}^{(n)},\end{aligned}$$

dla $q = 1, \ldots, d$, więc istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln t_j^{(n)} =: \chi_j, \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Uporządkujmy te liczby χ_j rosnąco i oznaczmy je przez $\lambda_1 < \ldots < \lambda_s$. Oznaczmy jeszcze dla $r = 1, \ldots, s$ przez $U_r^{(n)}$ podprzestrzeń własną operatora $|T^{(n)}|$ odpowiadającą wartości własnej $t_k^{(n)}$ takiej, że

$$\frac{1}{n} \ln t_k^{(n)} \longrightarrow \lambda_r. \tag{1}$$

Pokażemy, że dla ustalonego r podprzestrzenie $U_r^{(n)}$ zbiegają (do pewnej podprzestrzeni U_r), co w zasadzie załatwi dowód części *(1)* twierdzenia. Posłużymy się lematem, który śmiało można nazwać głównym krokiem dowodowym i głównym mięchem rachunkowym. Jego dowód odłożymy jednak do następnego paragrafu.

Lemat 1. *Dla $\delta > 0$ istnieje $K = K_\delta > 0$ takie, że zachodzi*

$$\max\left\{|<u, u'>| \mid u \in U_r^{(n)}, u' \in U_{r'}^{(n+k)}, \|u\| = \|u'\| = 1\right\} \leqslant K \exp\left(-n\left(|\lambda_{r'} - \lambda_r| - \delta\right)\right), \tag{2}$$

dla $k > 0$, dostatecznie dużych n oraz wszystkich $r, r' \in \{1, \ldots, s\}$.

Z lematu wynika, że dla każdego ustalonego $r = 1, \ldots, s$ ciąg podprzestrzeni $\left(U_r^{(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $G(d_r, d)$ grassmannianu d_r wymiarowych podprzestrzeni w $\mathbb{R}^d$. Istotnie, w $G(d_r, d)$ mamy metrykę $\rho(U, V) := \|P_U - P_V\|$, gdzie P_U, P_V oznaczają rzuty ortogonalne na podprzestrzenie U, V odpowiednio. Dla jednostkowego wektora x mamy

$$\begin{aligned}
\|(P_{U_r^{(n+k)}} - P_{U_r^{(n)}})x\| &= <(\mathrm{Id} - P_{U_r^{(n)}})x - (\mathrm{Id} - P_{U_r^{(n+k)}})x, (P_{U_r^{(n+k)}} - P_{U_r^{(n)}})x> \\
&= <(\mathrm{Id} - P_{U_r^{(n)}})x, P_{U_r^{(n+k)}}x> + <(\mathrm{Id} - P_{U_r^{(n+k)}})x, P_{U_r^{(n)}}x> \\
&\overset{\text{Lemat}}{\leqslant} 2K \sum_{r' \neq r} \exp\left(-n\left(|\lambda_{r'} - \lambda_r| - \delta\right)\right),
\end{aligned}$$

więc widać, że ciąg $\left(U_r^{(n)}\right)_{n \geqslant 1}$ spełnia warunek Cauchy'ego w metryce ρ.

Zatem $U_r^{(n)} \overset{G(d_r,d)}{\underset{\mathrm{w}}{\longrightarrow}} U_r$ dla pewnej podprzestrzeni U_r. Zaś oczywiście jeśli podprzestrzenie własne operatora zbiegają i wartości własne im odpowiadające też (tak mamy dla $|T^{(n)}|^{1/n}$), to operator zbiega, co dowodzi części *(1)* twierdzenia.

Dowodzimy teraz *(2)* z twierdzenia 3. Zauważmy przede wszystkim, że jeśli $u \in U_r$, to $P_{U_r^{(n)}}u \longrightarrow P_{U_r}u = u$, więc przechodząc w nierówności

$$|<P_{U_r^{(n+k)}}u, u'>| \leqslant K \exp\left(-n\left(|\lambda_{r'} - \lambda_r| - \delta\right)\right), \qquad u' \in U_{r'}^{(n)},$$

do granicy przy $k \longrightarrow \infty$ dostajemy

$$|<u, u'>| \leqslant K \exp\left(-n\left(|\lambda_{r'} - \lambda_r| - \delta\right)\right), \qquad u \in U_r,\ u' \in U_{r'}^{(n)}. \tag{3}$$

Ustalmy $v \in V_r \setminus V_{r-1}$. Chcemy udowodnić, że $\frac{1}{n} \ln \|T^{(n)}v\| \longrightarrow \lambda_r$. Najpierw oszacujemy z góry. Wiemy, że $|T^{(n)}|$ na podprzestrzeni własnej $U_l^{(n)}$, dla każdego $l \in \{1, \ldots, s\}$ działa prawie jak homotetia, tzn. dla $x \in U_l^{(n)}$ jest $|T^{(n)}|x = \sum_{m=r_0(l)}^{r_1(l)} t_m^{(n)} \|x_m\|$, gdzie $t_{r_0(l)}^{(n)}, \ldots, t_{r_1(l)}^{(n)}$ są wszystkimi różnymi wartościami własnymi $t_k^{(n)}$ przekształcenia $|T^{(n)}|$ takimi, że $\frac{1}{n} \ln t_k^{(n)} \longrightarrow \lambda_l$ oraz $x = \sum_{m=r_0(l)}^{r_1(l)} x_m$ jest rozkładem wektora x na odpowiednie wektory własne. Oznaczając $\chi_l = \max_{r_0(l) \leqslant m \leqslant r_1(l)} t_m^{(n)}$ mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \ln \|T^{(n)}v\| &= \frac{1}{n} \ln \||T^{(n)}|v\| = \frac{1}{n} \ln \|\sum_{l=1}^{d} \chi_l^{(n)} (P_{U_l^{(n)}}v)\| \\
&= \frac{1}{n} \ln \sqrt{\sum_{l=1}^{s} (\chi_l^{(n)})^2 \|P_{U_l^{(n)}}v\|^2} \\
&\leqslant \frac{1}{n} \ln \left(\sqrt{s} \max_{1 \leqslant l \leqslant s} \chi_l^{(n)} \|P_{U_l^{(n)}}v\|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2n} \ln s + \max_{1 \leqslant l \leqslant s} \left\{\frac{1}{n} \ln \left(\chi_l^{(n)} \|P_{U_l^{(n)}}v\|\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Dla $l \leqslant r$ szacujemy brutalnie

$$\chi_l^{(n)} \|P_{U_l^{(n)}}v\| \leqslant \chi_r^{(n)} \|v\|,$$

zaś dla $l > r$, oznaczając przez $e_{l,1}^{(n)}, \ldots, e_{l,d_l}^{(n)}$ pewną bazę ortonormalną podprzestrzeni $U_l^{(n)}$, mamy wobec (3) szacowanie

$$\begin{aligned}
\|P_{U_l^{(n)}}v\|^2 &= \sum_{k=1}^{d_l} |<v, e_{l,k}^{(n)}>|^2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{d_l} \left(\sum_{j \leqslant r} |<P_{U_j}v, e_{l,k}^{(n)}>|\right)^2 \\
&\overset{(3)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{d_l} \left(\sum_{j \leqslant r} K \exp\left(-n\left(\lambda_l - \lambda_j - \delta\right)\right)\right)^2 \\
&\leqslant d(Kr)^2 \exp\left(-2n\left(\lambda_l - \lambda_r - \delta\right)\right).
\end{aligned}$$

Stąd dla $l > r$

$$\frac{1}{n}\ln\left(\chi_l^{(n)}\|P_{U_l^{(n)}}v\|\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\chi_l^{(n)} + \frac{1}{n}\ln\left(\sqrt{d}Kr\right) - \lambda_l + \lambda_r + \delta.$$

Ostatecznie, ponieważ $\frac{1}{n}\ln\chi_l^{(n)} \longrightarrow \lambda_l$, mamy

$$\overline{\lim}\frac{1}{n}\ln\|T^{(n)}v\| \leqslant \lambda_r + \delta.$$

Z dołu szacuje się łatwiej, bowiem $\|T^{(n)}v\| \geqslant \psi_r^{(n)}\|P_{U_r^{(n)}}v\|$, gdzie $\psi_r = \min_{r_0(r)\leqslant m\leqslant r_1(r)} t_m^{(n)}$ natomiast $P_{U_r^{(n)}}v \longrightarrow P_{U_r}v \neq 0$, więc

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\frac{1}{n}\ln\|T^{(n)}v\| &\geqslant \underline{\lim}\frac{1}{n}\ln\left(\psi_r^{(n)}\|P_{U_r^{(n)}}v\|\right)] \\ &\geqslant \lambda_r + \underline{\lim}\frac{1}{n}\ln\|P_{U_r^{(n)}}v\| = \lambda_r.\end{aligned}$$

Z dowolności $\delta > 0$ mamy *(2)* z twierdzenia 3. □

5. Dowód lematu

Dowód lematu. Pokażemy najpierw oszacowanie (2) dla $r < r'$ (zobaczymy na koniec dowodu, że to wystarczy). Mamy naturalne ortogonalne rozbicie całej przestrzeni

$$\mathbb{R}^d = \sum_{t\leqslant r} U_t^{(n)} + \sum_{t\geqslant r+1} U_t^{(n)}.$$

Oznaczmy więc te składniki jako

$$\begin{aligned}V_r^{(n)} &:= \sum_{t\leqslant r} U_t^{(n)}, \\ \overline{V}_{r+1}^{(n)} &:= \sum_{t\geqslant r+1} U_t^{(n)},\end{aligned}$$

oraz zdefiniujmy rzuty ortogonalne na te przestrzenie odpowiednio przez $\pi_r^{(n)}$ oraz $\overline{\pi}_{r+1}^{(n)}$. Mamy oczywiście

$$\mathrm{Id} = \pi_r^{(n)} + \overline{\pi}_{r+1}^{(n)}.$$

Wystarczy pokazać, że

$$\|\overline{\pi}_{r'}^{(n)}u\| \leqslant K\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r'} - \lambda_r - \delta\right)\right), \qquad u \in V_r^{(n)}, \tag{4}$$

bo wtedy dla wektorów $u \in U_r^{(n)}, u' \in U_{r'}^{(n+k)}$ długości jeden mamy

$$\begin{aligned}|<u, u'>| &= |<u', \pi_{r'-1}^{(n+k)}u + \overline{\pi}_{r'}^{(n+k)}u>| = |<u', \overline{\pi}_{r'}^{(n+k)}u>| \\ &\overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} \|u'\|\|\overline{\pi}_{r'}^{(n+k)}u\| \leqslant K\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r'} - \lambda_r - \delta\right)\right).\end{aligned}$$

Bez utraty ogólności możemy założyć, że $\delta < |\lambda_{r'} - \lambda_r|$, dla $r' \neq r$. Wobec $\overline{\lim}\frac{1}{n}\ln\|T_n\| \leqslant 0$ mamy $\ln\|T_n\| < C + \frac{\delta}{4s}n$, dla pewnej stałej C. Ustalmy teraz $u \in U_r^{(n)}$. Oznaczając największą wartość własną $|T^{(n)}u|$ na podprzestrzeni $U_r^{(n)}$ przez $t_{r,\max}^{(n)}$ mamy na mocy (1), że $t_{r,\max}^{(n)} < \exp\left(n\left(\lambda_r + \frac{\delta}{4s}\right)\right)$, dla dostatecznie dużych n. Oczywiście stąd

$$\||T^{(n)}|u\| \leqslant t_{r,\max}^{(n)} \cdot \|u\| \leqslant \|u\|\exp\left(n\left(\lambda_r + \frac{\delta}{4s}\right)\right).$$

Mamy zatem z jednej strony oszacowanie

$$\begin{aligned}\||T^{(n+1)}|u\| &= \|T^{(n+1)}u\| = \|T_{n+1}T^{(n)}u\| \leqslant \|T_{n+1}\| \cdot \|T^{(n)}u\| \\ &= \|T_{n+1}\| \cdot \||T^{(n)}|u\| \leqslant \exp\left(C + \frac{\delta}{4s}(n+1)\right)\|u\|\exp\left(n\left(\lambda_r + \frac{\delta}{4s}\right)\right).\end{aligned}$$

Z drugiej strony szacujemy podobnie

$$\||T^{(n+1)}|u\| \geqslant \||T^{(n+1)}|\left(\overline{\pi}_{r'}^{(n+1)}u\right)\| \geqslant t_{r',\min}^{(n+1)}\|\overline{\pi}_{r'}^{(n+1)}u\|$$
$$\geqslant \exp\left((n+1)\left(\lambda_{r'}-\frac{\delta}{4s}\right)\right)\|\overline{\pi}_{r'}^{(n+1)}u\|.$$

Łącząc do kupki te dwa oszacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r'}^{(n+1)}u\| &< \|u\|\exp\left(C+\frac{\delta}{4s}(n+1)+n\lambda_r+\frac{\delta}{4s}n+\frac{\delta}{4s}(n+1)-(n+1)\lambda_{r'}\right)\\
&= \|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r'}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)+\underbrace{C-\lambda_{r'}+2\frac{\delta}{4s}-n\frac{\delta}{4s}}_{<0 \text{ dla dostatecznie dużych n}}\right) \qquad (5)\\
&\leqslant \|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r'}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k)}u\| &= \|\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k)}\pi_r^{(n+k-1)}u+\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}u\|\\
&\overset{(5)}{\leqslant} \|u\|\exp\left(-(n+k-1)\left(\lambda_{r+1}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right)+\|\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}u\|\\
&\leqslant \ldots \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\|u\|\exp\left(-(n+j)\left(\lambda_{r+1}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right) \qquad (6)\\
&< K_1\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r+1}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right),
\end{aligned}$$

gdzie $K_1=\sum_{j=0}^{\infty}\exp\left(-j\left(\lambda_{r+1}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right)$. Dalej, skoro

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)} &= \overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_r^{(n+k-1)}+\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}\\
&= \overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_r^{(n+k-1)}+\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_{r+1}^{(n+k-1)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}\\
&+\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\underbrace{\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k-1)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}}_{\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k-1)}},
\end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}u\| \leqslant{}& \|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_r^{(n+k-1)}u\|+\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_{r+1}^{(n+k-1)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}u\|\\
&+\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k-1)}u\|.
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik szacujemy z (5)

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_r^{(n+k-1)}u\| &\leqslant \|\pi_r^{(n+k-1)}u\|\exp\left(-(n+k-1)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right)\\
&\leqslant \|u\|\exp\left(-(n+k-1)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right),
\end{aligned}$$

drugi najpierw z (5) a potem z (6)

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\pi_{r+1}^{(n+k-1)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}u\| &\leqslant \|\pi_{r+1}^{(n+k-1)}\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}u|\|\exp\left(-(n+k-1)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_{r+1}-\frac{\delta}{s}\right)\right)\\
&\leqslant \|\overline{\pi}_{r+1}^{(n+k-1)}u|\|\exp\left(-(n+k-1)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_{r+1}-\frac{\delta}{s}\right)\right)\\
&\leqslant K_1\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r+1}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right)\\
&\times\exp\left(-(n+k-1)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_{r+1}-\frac{\delta}{s}\right)\right),
\end{aligned}$$

wreszcie trzeci brutalnie, tak żeby móc do niego odgrzać dowcip

$$\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k-1)}u\| \leqslant \|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k-1)}u\|.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r+2}^{(n+k)}u\| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\left(\|u\|\exp\left(-(n+j)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right)\right) \\
&+\sum_{j=0}^{k-1}K_1\|u\|\exp\left(-(n+j)\left(\lambda_{r+2}-\lambda_{r+1}-\frac{\delta}{s}\right)\right)\exp\left(-n\left(\lambda_{r+1}-\lambda_r-\frac{\delta}{s}\right)\right) \\
&\leqslant K_2\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r+2}-\lambda_r-\frac{2\delta}{s}\right)\right).
\end{aligned}$$

Dalej podobnie — otrzymamy dla dowolnego $r' > r$ i $u \in V_r^{(n)}$ oszacowanie

$$\begin{aligned}
\|\overline{\pi}_{r'}^{(n+k)}u\| &\leqslant K\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r'}-\lambda_r-(r'-r)\frac{\delta}{s}\right)\right) \\
&\leqslant K\|u\|\exp\left(-n\left(\lambda_{r'}-\lambda_r-\delta\right)\right),
\end{aligned}$$

co dowodzi (4) w przypadku $r' > r$ i tym samym fragmentu tezy lematu, czyli nierówności (2) dla $r' > r$.

Jasne jest, że dla $r' = r$ nierówność (2) też zachodzi. Spróbujmy ją teraz pokazać dla $r > r'$, być może zwiększając stałą K. Ustalmy w tym celu $r > r'$ oraz wektory jednostkowe $u \in U_r^{(n)}$, $u' \in U_{r'}^{(n+k)}$. Uzupełnijmy u do bazy ortonormalnej $e_1, \ldots, e_l$ przestrzeni $U_r^{(n)} + U_{r'}^{(n)}$. Analogicznie zróbmy z u' — uzupełniamy go do bazy ortonormalnej $f_1, \ldots, f_l$ przestrzeni $U_r^{(n+k)} + U_{r'}^{(n+k)}$ (warto uświadamiać sobie tutaj, że dla dostatecznie dużych n wymiary podprzestrzeni $U_r^{(n)}$ są już ustalone, tzn. zależą tylko od r). Patrzymy się na macierz ortogonalną $C := [< e_i, f_j >]_{i,j=1}^{l}$. Wiemy już, że poniżej diagonali jest spoko, tzn. dla $i \geqslant j$ mamy szacowanie

$$|< e_i, f_j >| \leqslant K\exp\left(-n\left(\lambda_r-\lambda_{r'}-\delta\right)\right).$$

Chcemy podobnie oszacować $| < e_j, f_i > |$, bo to w szczególności da oszacowanie na $| < u, u' > |$. Ponieważ $C^T = C^{-1}$, możemy ten wyraz macierzowy policzyć ze wzoru na macierz odwrotną. Wyznacznik C jest co do modułu równy jeden, więc mamy

$$|< e_j, f_i >| = |C_{ji}|,$$

gdzie C_{ji} to minor powstały z C przez skreślenie j-tego wiersza i i-tej kolumny. Licząc go z permutacyjnego wzoru na wyznacznik widzimy, że każdy składnik sumy po wszystkich możliwych permutacjach będzie w postaci iloczynu $n-1$ czynników — wyrazów macierzy C, przy czym w tym iloczynie zawsze wystąpi co najmniej jeden wyraz z diagonali lub poniżej niej, a nań mamy już dobre oszacowanie. Pozostałe wyrazy z iloczynu szacujemy oczywiście brutalnie przez 1 dostając co potrzeba. Stałą K wystarczy więc zastąpić na $K \cdot (d-1)!$. Kończy to dowód lematu. □

Dodatek A. Grassmannian

Przez $G(k,n)$ oznaczamy zbiór wszystkich podprzestrzeni liniowych k wymiarowych w $\mathbb{R}^n$ i nazywamy **grassmannianem**. Można na grassmannianie wprowadzić metrykę

$$\rho(U,V) := \|P_U - P_V\|, \qquad U,V \in G(k,n),$$

gdzie P_X oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń liniową $X \subset \mathbb{R}^n$. Łatwo zrozumieć jak działa ta metryka w przypadku nisko wymiarowym, np. dla $G(1,2)$ robiąc sobie odpowiedni rysunek.

Dodatek B. Moduł przekształcenia liniowego

Niech $A\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ będzie przekształceniem linowym. Bardzo pożytecznym pojęciem jest jego symetryzacja, czyli operator $A^T A$. Jest to przekształcenie samosprzężone, nieujemnie określone, więc się diagonalizuje z nieujemnymi wartościami własnymi. Łatwo więc dzięki tej obserwacji określić **moduł przekształcenia liniowego** A

$$|A| := \sqrt{A^T A}.$$

Kluczowa jest obserwacja, że $\||A|x\| = \|Ax\|$, dla dowolnego wektora x. Wynika bowiem z niej, że A i $|A|$ różnią się multiplikatywnie o izometrię oraz mają tę samą normę. Korzystaliśmy z tych fakcików wielokrotnie.

Dodatek C. Algebra zewnętrzna

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową d wymiarową z ustaloną bazą $e_1, \ldots, e_d$. Dla $q \in \{1, \ldots, d\}$ określamy jej **potęgę zewnętrzną** jako rzeczywistą przestrzeń liniową rozpiętą przez wektory $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}$, dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant d$, przy czym o dzióbku $\wedge$ myślimy jak o antysymetrycznym formalnym działaniu na wektorach. Przestrzeń tę oznaczamy jako $\bigwedge^q V$. Jeśli na przestrzeni V mamy zadany iloczyn skalarny, to indukuje on naturalny iloczyn skalarny na potędze $\bigwedge^q V$. Otóż mówimy, że $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q})$ jest bazą ortonormalną na $\bigwedge^q V$, jeśli (e_i) nią jest na V.

Dla endomorfizmu $A\colon V \longrightarrow V$ możemy określić jego q-tą **potęgę zewnętrzną**, czyli endomorfizm $A^{\wedge q}\colon \bigwedge^q V \longrightarrow \bigwedge^q V$ zadany na bazie jak następuje

$$A^{\wedge q}(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}) = Ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge Ae_{i_q}.$$

Podstawową zaletą potęgi zewnętrznej operatora jest to, że pozwala on wydobyć iloczyny wartości własnych wyjściowego operatora, z czego intensywnie korzystaliśmy. Dokładnie, jeśli A ma wartości własne $t_1, \ldots, t_d$, to $(t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_q})_{i_1 < \ldots < i_q \leqslant d}$ są wartościami własnymi operatora $A^{\wedge q}$. Ponadto, jeśli $|t_1| \leqslant \ldots \leqslant |t_d|$, to oczywiście

$$\|A\| = |t_n|,$$
$$\|A^{\wedge q}| = |t_n t_{n-1} \cdot \ldots \cdot t_{n-(q-1)}|.$$

W szczególności

$$\|A^{\wedge q}| \leqslant \|A\|^q.$$

Nietrudno sprawdzić taką funktorialną własność potęgi zewnętrznej operatora

$$(A \circ B)^{\wedge q} = A^{\wedge q} \circ B^{\wedge q}.$$

Jest ona bardzo pożyteczna, bo wynika z niej niemalże natychmiast, że

$$|A^{\wedge q}| = |A|^{\wedge q},$$

a to wiele razy było dla nas użyteczne.

Literatura

[Ru] David Ruelle, *Ergodic Theory of differnetiable systems*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **50** (1979), 27-58.

[St] J. Michael Steele, *Kingman's subadditive ergodic theorem*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **50** (1989), 93-98