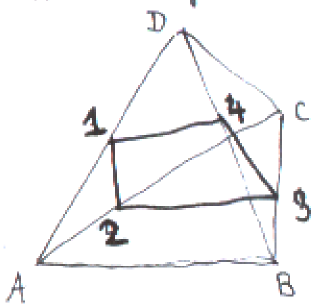
Seminarium z Geometrii
„Nierówności w geometrii elementarnej"

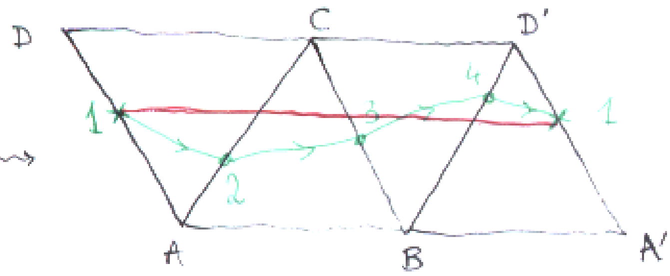
7 III 2011
Tomasz Tkocz

Po prostu zaprezentujemy zadania elementarne, różnych typów, z motywem nierówności.

ZAD 1 (VOMG, Ist) Czworościan foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest minimalny obwód tego czworokąta?

ROZW Wszystko widać na siatce.

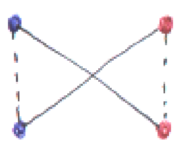




obwód ≥ 2 i $=$ dla płaszczyzny wyznaczonej przez proste skośne. □

ZAD 2 (kropki, [Pr], zad 9.19) Na płaszczyźnie danych jest n czerwonych i n niebieskich kropek. Udowodnić, że można narysować n odcinków o końcach różnokolorowych, które są parami rozłączne.

ROZW Wybieramy takie n odcinków, których suma długości jest minimalna. Ta ekstremalna konfiguracja ma żądaną własność.

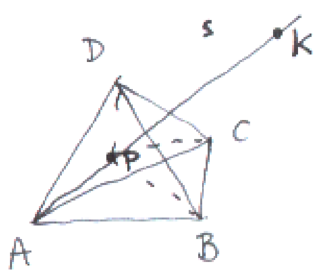


$\to$ ---- . □

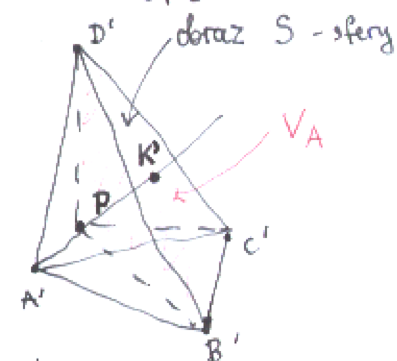
ZAD 3 (M. Kieza, Klub 44M, zad 592) Punkt P leży wewnątrz czworościanu ABCD. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery opisane na czworościanach PBCD, PCDA, PDAB, PABC odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od P). Udowodnić, że

$$\frac{AP}{AK}\,\frac{BP}{BL}\,\frac{CP}{CM}\,\frac{DP}{DN} \leq \frac{1}{256}.$$

ROZW.



inwersja względem sfery o środku w P



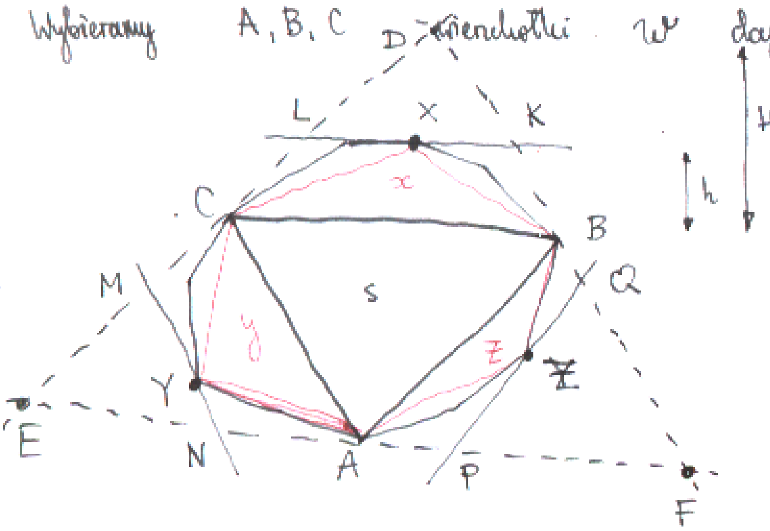
$V_A + V_B + V_C + V_D = V$

Mamy $\frac{AK}{AP} = 1 + \frac{PK}{AP} \underset{\substack{\text{inwersja} \\ AP\cdot AP^* = KP\cdot K'P}}{=} 1 + \frac{A'P}{K'P} = \frac{A'K'}{K'P} = \frac{V}{V_A}$, więc do udowodnienia

$\frac{1}{4^4} = \frac{1}{256} \geq \frac{V_A}{V}\,\frac{V_B}{V}\,\frac{V_C}{V}\,\frac{V_D}{V}$ – OK wobec nierówności między średnimi. □

ZAD 4 (LVI OM, III st) Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt o polu nie mniejszym niż $\frac{3}{4}$.

ROZW Bso nasz wielokąt $\mathcal{W}$ jest przynajmniej 7-kątem (inaczej odcinamy ε-rogi). Wybieramy A, B, C – wierzchołki $\mathcal{W}$ dające trójkąt o największym polu.



Wtedy $\mathcal{W}$ jest zawarty w trójkącie DEF ograniczonym prostymi równoległymi do boków trójkąta ABC i przechodzącymi przez wierzchołki.

Niech X – wierzchołek $\mathcal{W}$ leżący po przeciwnej stronie jak A względem prostej BC najdalej od niej oddalony. Podobnie definiujemy Y i Z. Prowadzimy znowu proste ograniczające $\mathcal{W}$. Pokażemy, że pole ABCXYZ jest większe-równe $\frac{3}{4}$, czyli, że $s + x + y + z \geq \frac{3}{4}$.

Liczymy pole 6 kąta KLMNPQ, bo ono ≥ 1 (on zawiera $\mathcal{W}$). Patrzymy się na trójkąty BCD, KLD i trapez BCLK (jego pola szukamy).

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} h \cdot BC \\ s &= \tfrac{1}{2} H \cdot BC \end{aligned}\right] \text{pola trójkątów} \qquad \frac{KL}{H-h} = \frac{BC}{H} \text{ – podobieństwo}$$

$$[CBKL] = \frac{(KL + BC)h}{2} = \left(\frac{H-h}{H} + 1\right)\frac{BC \cdot h}{2} = \left(2 - \frac{h}{H}\right)x = \left(2 - \frac{x}{s}\right)x = 2x - \frac{x^2}{s}.$$

Zatem

$$[KLMNPQ] = s + 2x - \frac{x^2}{s} + 2y - \frac{y^2}{s} + 2z - \frac{z^2}{s} \geq 1$$

Wystarczy udowodnić

$$s + x + y + z \geq \frac{3}{4}\left(s + 2x + 2y + 2z - \frac{x^2+y^2+z^2}{s}\right)$$

$$\Updownarrow \quad |\cdot 4s$$

$$4s^2 + 4s(x+y+z) \geq 3s^2 + 6s(x+y+z) - 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{3}\left((s-3x)^2 + (s-3y)^2 + (s-3z)^2\right) \geq 0. \quad \square$$

ZAD 5 (Hardy) $\left|\det[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right| \le \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

ROZW. pole trójkąta $\le \frac{1}{2}\cdot$ iloczyn długości dwóch boków. □

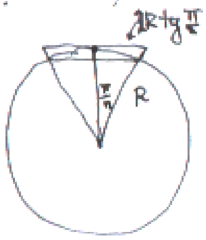
ZAD 6 ([Pr, zad 9.48]) a) W ~~okrąg o promieniu 1 wielokąt~~ koło o polu S n-kąt foremny wpisano i jego pole wynosi S_1 oraz opisano n-kąt foremny o polu S_2. Ud. że

$S^2 > S_1 S_2$

b) W okrąg o obwodzie L wpisano n-kąt foremny o obwodzie L_1 i opisano n-kąt foremny o obwodzie L_2. Ud. że

$L^2 < L_1 L_2$

ROZW. a)



$S_1 = n\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$, $S_2 = n\cdot\frac{1}{2}2R^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$

$S_1 S_2 = R^4 n^2 \sin^2\frac{\pi}{n} < \pi^2 R^4 = S^2$.

b) $L_1 = 2nR\sin\frac{\pi}{n}$, $L_2 = 2nR\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$

$L_1L_2 = (2nR)^2\sin\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} = \underbrace{(2\pi R)^2}_{L^2}\frac{\sin\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}}{(\pi/n)^2}$

więc wyst. ud. że $\sin x\,\mathrm{tg}\,x \overset{>}{\cancel{\ge}} x^2$, $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$.

$\Updownarrow$

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \overset{>}{\cancel{\ge}} \cos x$,

ale $\frac{\sin x}{x} > 1-\frac{x^2}{3!}$, $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$, więc wyst spr że

$\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^2 = 1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{36} \overset{>}{\cancel{\ge}} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \iff \frac{1}{6}x^2 > x^4\left(\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^3 3^2}\right) = x^4\frac{1}{2^3\cdot 3^2}$

$\iff 2^2\cdot 3x^2 > x^4 \iff 12 > x^2$ - OK na $(0,\frac{\pi}{3}]$. □

ZAD 7 ([Pr, zad 9.80]) a) rzuty odcinka na osie wynoszą a,b. Udowodnić, że jego długość wynosi przynajmniej $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$

b) długości rzutów wielokąta na osie wynoszą a i b. Udowodnić, że jego obwód wynosi przynajmniej $\sqrt{2}(a+b)$.

ROZW a) $l=\sqrt{a^2+b^2} \ge \sqrt{2}\,\frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

b) obwód $= \sum l_i = \sum\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{2}\sum\frac{a_i+b_i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sum a_i + \frac{1}{2}\sum b_i\right)$

$= \sqrt{2}(a+b)$. □

ZAD 8. Obwód trójkąta ostrokątnego jest większy od $4R$.

ROZW. $a+b+c = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) > 2R\left(\frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2\beta}{\pi} + \frac{2\gamma}{\pi}\right) = 4R.$

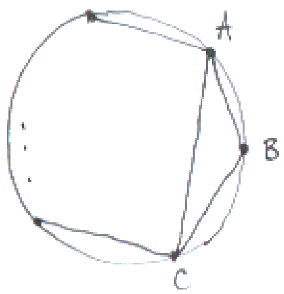
$\cancel{3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}}$

~~Obwód też $\leq 3\sqrt{3}R$~~ $\geq 4R$. $\square$

ZAD 9. Pośród wszystkich wielokątów wpisanych w dany okrąg znaleźć taki, którego suma kwadratów długości boków jest największa.

ROZW. 1. Każdy ~~wielokąt~~ n-kąt, $n \geq 4$ ma kąt o mierze $\geq 90°$.

2. W trójkącie rozwartokątnym  $c^2 > a^2 + b^2$

3. 

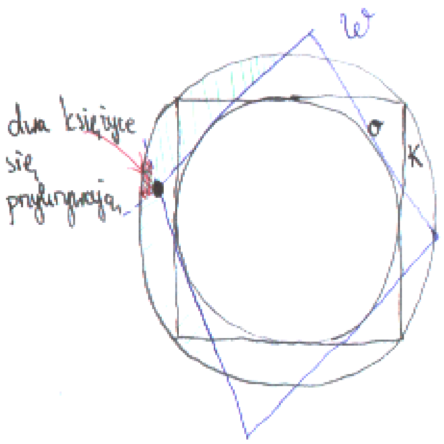
Rozważmy n-kąt wpisany w okrąg i wierzchołek B o kącie $\geq 90°$. Z 2. suma kwadratów długości boków jest większa w wielokącie z usuniętym wierzchołkiem B.

4. Optymalne są więc trójkąty, a wśród nich najlepszy jest równoboczny (wklęsłość $\sin^2$ [illegible] $\square$

ZAD 10. ([Mo, zad. 1.25]) Udowodnić, że pośród wszystkich n-kątów opisanych na danym okręgu o najmniejsze pole ma n-kąt foremny (n-ustalone).

ROZW. Robimy tylko dowód dla $n=4$. Niech K - kwadrat opisany na o, O - okrąg opisany na K. Niech $W \neq K$ - dowolny czworokąt opisany na o. Pokażemy, że

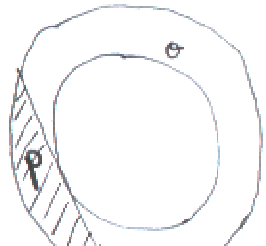
$$|W \cap O| > |K|.$$



Każda styczna do o odcina od O księżyc o tym samym polu p. Mamy $|K| = |O| - 4p$,

$|O| - |W \cap O| =$ pole sumy 4 księżyców, przy czym któreś* się przecinają $< 4p$

więc teza.



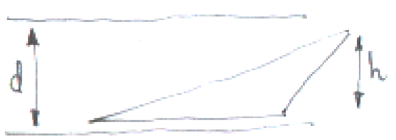
* któryś wierzchołek W musi leżeć w pierścieniu $O \setminus o$, to któryś kąt W musi być większy od kąta K. $\square$

ZAD 11 ([Mo, zad 1.26]) Spośród n-kątów opisanych na danym okręgu najmniejszy obwód ma n-kąt foremny.

ROZW. ~~Wyf~~ Wynika od razu z zad 10, bo $S = \frac{1}{2} L r$. □

ZAD 12 ([Mo, zad 1.20]) Udowodnić, że w pasie płaszczyzny o szerokości $\sqrt[4]{3}$ zmieści się dowolny trójkąt o polu 1.

ROZW. Wystarczy udowodnić, że trójkąt o polu 1 ma wysokość nie dłuższą niż $\sqrt[4]{3}$



– równoważnie, bok nie krótszy niż $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Gdyby tak nie było, to ponieważ trójkąt nie może być równoboczny (taki ma boki długości $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$), ma kąt $\gamma < 60^\circ$. Wtedy

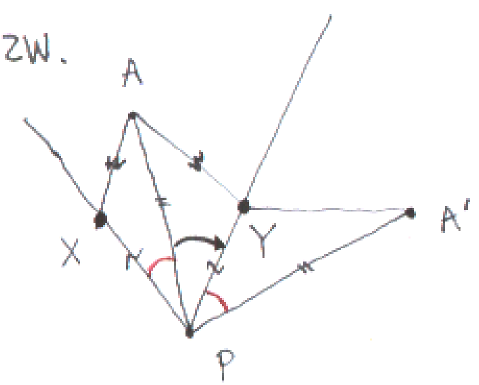
$$1 = S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma < \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \sin 60^\circ = 1.$$

Sprzeczność kończy dowód. □

ZAD 13 (LIX OM, I st) Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P i punkt A leżący wewnątrz tego kąta. Punkty X, Y leżą na różnych ramionach tego kąta, przy czym $PX = PY$ oraz wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że

$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YAP$.

ROZW.



$$AX + AY = AY + YA' \geq AA'$$

i $= \iff Y \in AA'$

$\iff \sphericalangle YA'P = \sphericalangle YAP$

$\iff$ PA – dwusieczna kąta XPY.

ZAD 14 (Erdös-Mordell, [Ca, Zad I.1.3.4]) Jeżeli O jest jakimkolwiek punktem wewnątrz trójkąta ABC, a P, Q, R są spodkami prostopadłych opuszczonych z punktu O odpowiednio na boki BC, CA, AB, to

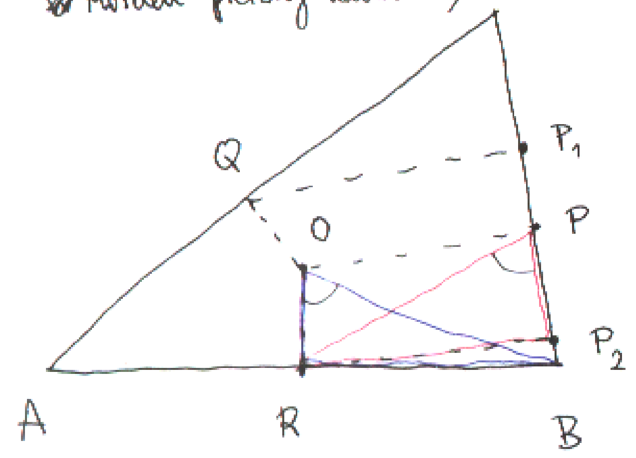
$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR)$$

(Nierówność Erdösa-Mordella)

ROZW. Rzutujemy Q, R na bok BC dostając punkty P_1, P_2.

(Mordell 1937)

(Zadanie postawił Erdös, Mordell pierwszy udowodnił)



Wtedy

$$\triangle ORB \sim \triangle PP_2R,$$

bo są to trójkąty prostokątne z równymi kątami (na czworokącie $ORBP$ można opisać okrąg o średnicy OB).

Zatem

$$PP_2 = OR\,\frac{PR}{OB}.$$

Podobnie

$$PP_1 = OQ\,\frac{PQ}{OC}.$$

Szacujemy

Długość rzutu ⊥ odcinka QR

$$OA \geq \cancel{OA\,\frac{QR}{P_1P_2}}\quad OA\,\frac{P_1P_2}{QR} = OA\,\frac{OR\cdot PR/OB + OQ\cdot PQ/OC}{QR}$$

Podobnie

$$OB \geq OB\,\frac{OR\cdot QR/OA + OP\cdot PQ/OC}{PR},$$

$$OC \geq OC\,\frac{OP\cdot PR/OB + OQ\cdot QR/OA}{PQ}.$$

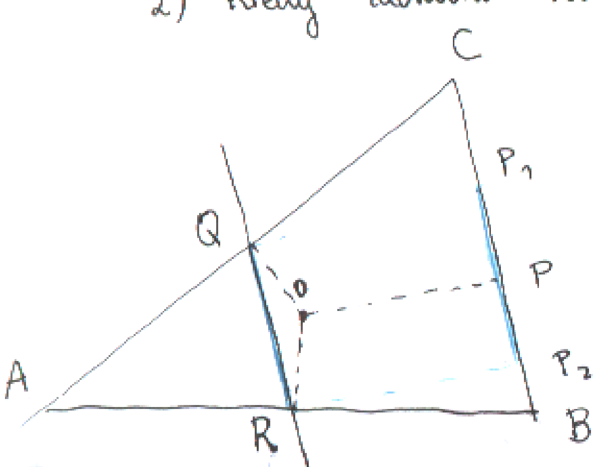
Po dodaniu stronami

$$OA + OB + OC \geq \underbrace{OP}_{\text{ma być w tezie}}\left(\frac{OB\cdot PQ}{OC\cdot PR} + \frac{OC\cdot PR}{OB\cdot PQ}\right) + \ldots$$

$$\geq 2(OP + OQ + OR).\ \square$$

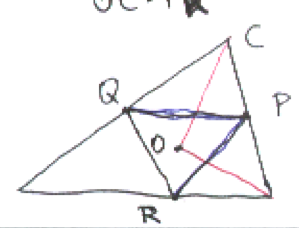
1) Trzeba zrobić oddzielny rysunek i przekonać się, że jest dobre dla trójkąta rozwartokątnego.

2) Kiedy zachodzi równość?

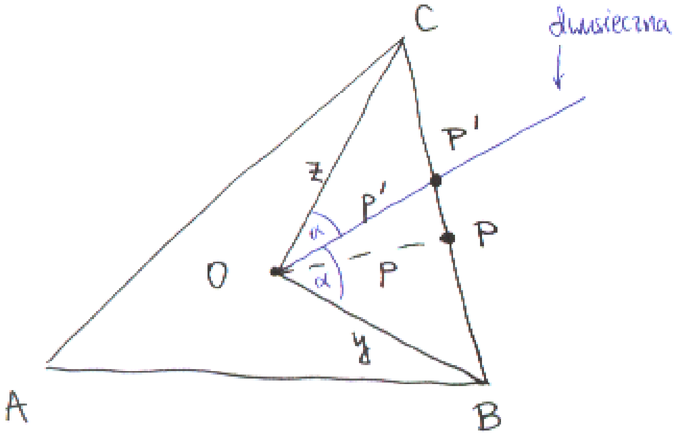


- QR nie może maleć po zrzutowaniu, czyli $QR \parallel BC$, itd.
  $\Rightarrow$ P, Q, R – środki, O – środek okręgu opisanego

- $\dfrac{OB\cdot PQ}{OC\cdot PR} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{PR}{PQ}$, $OB/OC = 1$ (promienie) $\Rightarrow PR = PQ \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle$ równoboczny



3) Zachodzi mocniejsza nierówność, że



$$x+y+z \geq 2(p'+q'+r')$$

$\uparrow$ długość dwusiecznej w trójkącie BOC

Istotnie, (Mordell, 1960)

$$\text{Pole } BOC = \tfrac{1}{2} yz \sin 2\alpha = \tfrac{1}{2} p'(z+y)\sin\alpha \geq \tfrac{1}{2} 2p'\sqrt{yz}\,\sin\alpha,$$

więc

$$\sqrt{yz}\cos\alpha \geq p'.$$

Podobnie

$$\sqrt{zx}\cos\beta \geq q', \qquad \sqrt{xy}\cos\gamma \geq r'. \qquad (*)$$

Ale

$$x+y+z - 2\sqrt{yz}\cos\alpha - 2\sqrt{zx}\cos\beta - 2\sqrt{xy}\cos\gamma$$
$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y}\cos\gamma - \sqrt{z}\cos\beta)^2 + (\sqrt{y}\sin\gamma - \sqrt{z}\sin\beta)^2 \geq 0,$$

więc

$$x+y+z \geq 2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) \underset{(*)}{\geq} 2(p'+q'+r'). \quad \square$$

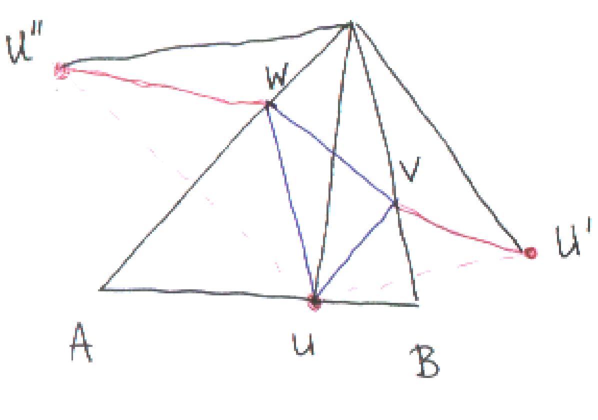
Kiedy zachodzi $=$? Najpierw widać, że musi być $x=y=z$. Potem $\sqrt{y}\sin\gamma - \sqrt{z}\sin\beta = 0 \Rightarrow \gamma=\beta=\alpha$ itd. Więc trójkąt ma być równoboczny, punkt O jest jego środkiem.

ZAD 15 (Problem Fagnano, [Co, I.1.8]) W trójkąt ostrokątny ABC wpisać trójkąt UVW o minimalnym obwodzie.

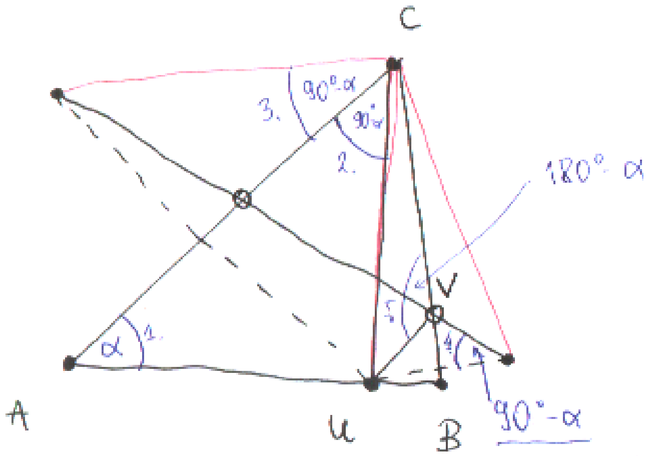
ROZW. Obwód UVW $=$ długość łamanej $\geq U'U'' = 2 \cdot \underbrace{CU}_{\text{ramię}} \cdot \underbrace{\sin \measuredangle C}_{\text{ustalone}}$

$\uparrow$ podstawa trójkąta równoramiennego $CU'U''$

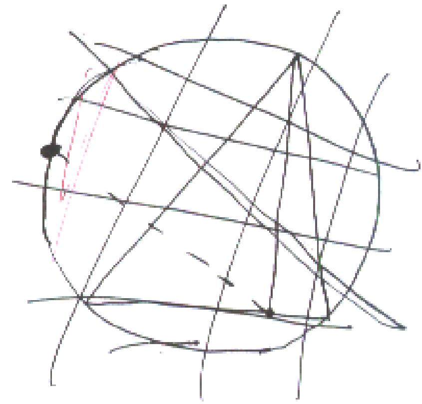
$$\geq 2 \cdot \underbrace{CC'}_{\text{wysokość}} \cdot \sin\measuredangle C.$$



Co wtedy z V, W – czym są (zaczęliśmy odbijać U – wybór arbitralny i wyszło, że U – spodek wysokości, więc V, W to też powinny być spodki wysokości)?



bo to kąt wpisany oparty na łuku $U'U^*$, którego kąt środkowy wynosi $2\cdot(90°-\alpha)$



Widzimy, że na AUVC można opisać okrąg, więc $\sphericalangle AVC = \sphericalangle AUC = 90°$ (AC to jego średnica).

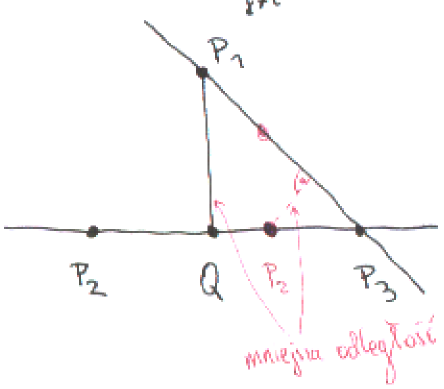
> „[Reductio ad absurdum] Jest o wiele bardziej subtelnym gambitem niż jakikolwiek gambit szachowy; szachista może zaofiarować poświęcenie piona lub nawet figury, matematyk zaś ofiarowuje całą grę."
>
> G.H. HARDY

ZAD 16. (Problem Sylwestera, 1893, [Co, I.4.7])
Udowodnić, że nie jest możliwe umieszczenie skończenie wiele punktów na płaszczyźnie tak, że prosta przechodząca przez dwa z nich zawiera jeszcze trzeci, chyba, że umieścić je na jednej prostej.

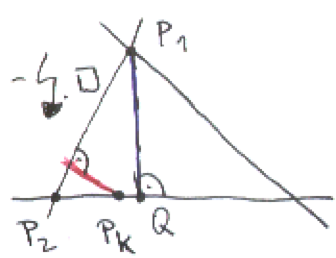
Motzkin (≈ 1940) udowodnił pozytywną wersję, równoważną

Jeśli nie wszystkie n punktów płaszczyzny leżą na jednej prostej, to istnieje prosta zawierająca dokładnie dwa spośród tych punktów.

ROZW (Kelly, 1948). Niech nasze punkty to $P_1, \dots, P_n$ i niech (P_1, P_2P_3) realizują $\min\limits_{\substack{i\neq j\neq k,\\ j\neq i}} \operatorname{dist}(P_i, P_jP_k)$. Niech Q – rzut P_1 na P_2P_3.



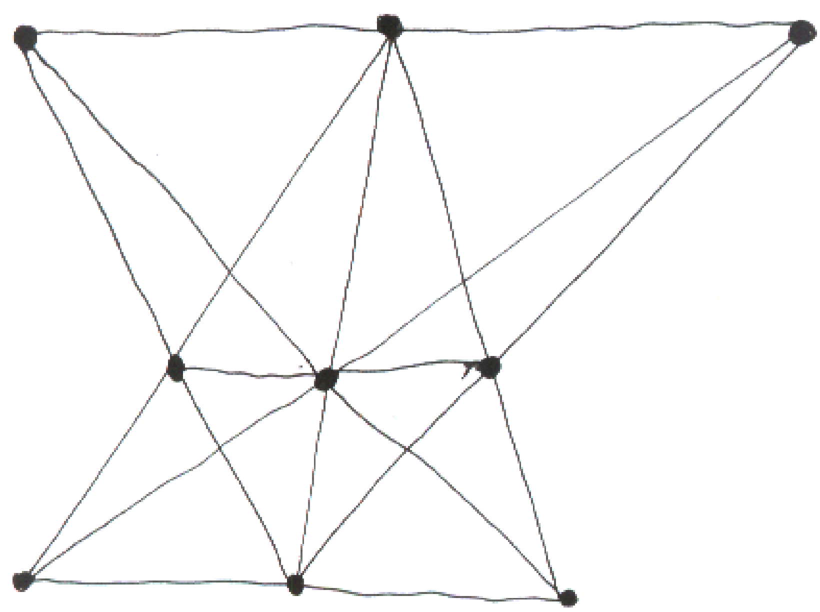
Wtedy P_2, P_3 leżą po różnych stronach Q.
Gdyby ~~jakiś~~ jakiś P_k leżał na prostej P_2P_3, to np. po tej stronie co P_2.
Wtedy (P_k, P_1P_2) lepiej minimalizuje – ↯. □



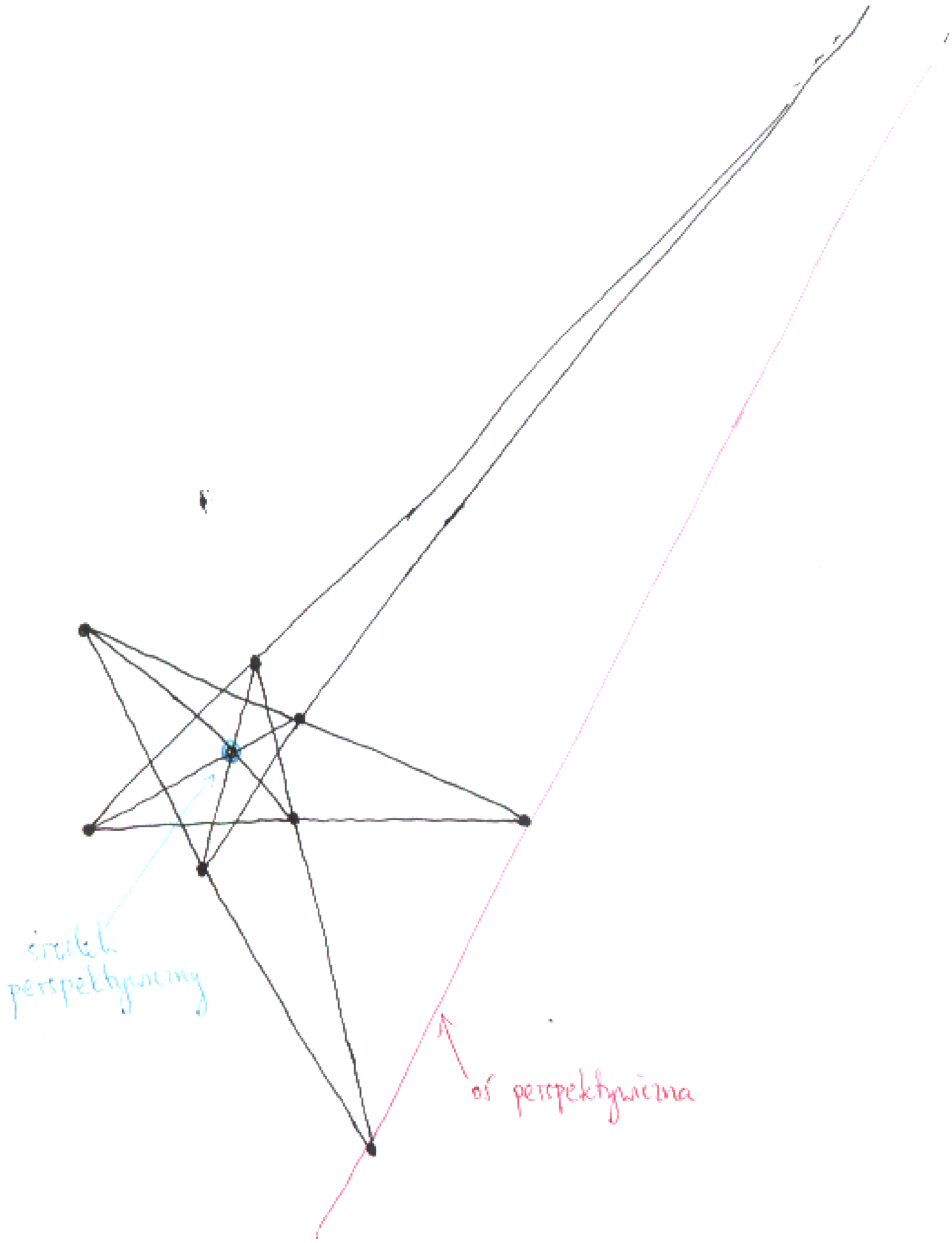
Motywacją zadania Sylwestera mogły być jego rozważania na temat zadania ogrodnika króla francuskiego

Posadzić 9 drzew w 10 rzędach po 3, żeby było ładnie w ogródku.

Rozwiązał to Desargue – trójkąty mają środek perspektywiczny wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną.



Rys. Konfiguracja Desarguesa



LITERATURA

[Co] H.S.M. Coxeter, „Introduction to Geometry", New York, London, John Wiley & Sons, 1991

[Mo] E. Moroz, „Ekstrema w geometrii bez rachunku różniczkowego", praca magisterska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, 1995.

[Pr] V. Prasolov, „Plane geometry".