$$\boxed{\varphi(x) := e^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,dt \quad , x\in\mathbb{R}} \tag{0}$$

„Oszacowania funkcji φ"
KPM 17, 24 III 2011
Tomasz Tkocz

LM1. Dla każdego $n\geq 0$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany P_n, Q_n spełniające

$$\varphi^{(n)} = P_n\varphi - Q_n .$$

Ponadto,

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = xP_n(x) + P_n'(x) & (1)\\ Q_{n+1}(x) = P_n(x) + Q_n'(x) \qquad , n\geq 0. & (2)\\ P_0 \equiv 1 \\ Q_0 \equiv 0 \end{cases}$$

D-D. Jednoznaczność – gdyby jej nie było, to

$$0 = U\varphi + V,$$

dla pewnych wielomianów U, V. Ale $\varphi \underset{x\to-\infty}{\approx} e^{x^2/2}$, więc musi być $U \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, co daje $U\equiv 0$ i wtedy też $V\equiv 0$.

Pozostaje sprawdzić równania rekurencyjne.

$$\varphi^{(n+1)} = (P_n\varphi - Q_n)' = P_n'\varphi + P_n\varphi' - Q_n'$$

$$\underset{\boxed{\varphi' = x\varphi - 1}}{=} P_n'\varphi + P_n x\varphi - P_n - Q_n' = (\underbrace{xP_n + P_n'}_{P_{n+1}})\varphi - (\underbrace{P_n + Q_n'}_{Q_{n+1}}) \qquad \square$$

WN. P_n, Q_n są wielomianami o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Ponadto, wiodący współczynnik w

- P_n to x^n,
- Q_n to x^{n-1}.

LM2. (a)
$$\begin{cases} P_0\equiv 1, \quad P_1 \equiv X \\ P_{n+1} = XP_n + nP_{n-1} \end{cases} \tag{3}$$

(b)
$$\begin{cases} Q_0\equiv 0, \quad Q_1\equiv 1 \\ Q_{n+1} = XQ_n + nQ_{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

D-D. $\varphi^{(n+1)} = (x\varphi - 1)^{(n)} \underset{\text{Leibniz}}{=} x\varphi^{(n)} + n \varphi^{(n-1)}$

tzn.

$$P_{n+1}\varphi - Q_{n+1} = x(P_n\varphi - Q_n) + n(P_{n-1}\varphi - Q_{n-1})$$
$$= (xP_n + nP_{n-1})\varphi - (xQ_n + nQ_{n-1})$$

i z argumentu o jednoznaczności (d-d lm 1) mamy tezę. □

LM3. (a) $\gamma_n = Q_{n+1}P_n - P_{n+1}Q_n = (-1)^n n!$, $n \geq 0$ (5)

(b) $\delta_n = Q_{n+2}P_n - P_{n+2}Q_n = (-1)^n n!\, x$, $n \geq 0$ (6).

D-D. (a)
$$\gamma_n := \det\begin{bmatrix} Q_{n+1} & P_{n+1} \\ Q_n & P_n \end{bmatrix}$$
$$= \det\begin{bmatrix} x & n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_n & P_n \\ Q_{n-1} & P_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= -n\gamma_{n-1}$$
$$\gamma_0 = \det\begin{bmatrix} Q_1 & P_1 \\ Q_0 & P_0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

więc $\gamma_n = (-1)^n n!$.

(b) Trzeba najpierw sobie obliczyć P_{n+2}. Mamy

$$P_{n+2} = xP_{n+1} + (n+1)P_n = x(xP_n + nP_{n-1}) + (n+1)P_n$$
$$= (x^2+n+1)P_n + n(xP_{n-1}) = (x^2+n+1)P_n + n(P_n - (n-1)P_{n-2})$$
$$= (x^2+2n+1)P_n - n(n-1)P_{n-2}.$$

Dla Q_n tak samo. Zatem

$$\delta_n = \det\begin{bmatrix} Q_{n+2} & P_{n+2} \\ Q_n & P_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x^2+2n+1 & -n(n-1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_n & P_n \\ Q_{n-2} & P_{n-2} \end{bmatrix}$$
$$= +n(n-1)\delta_{n-2}$$

a skoro
$$\delta_0 = \det\begin{bmatrix} x & \overset{x^2+1}{\overset{\shortparallel}{P_2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = x, \quad \delta_1 = \begin{bmatrix} x^2+2 & x^3+3x \\ 1 & x \end{bmatrix} = -x$$

$Q_0 = 0$
$Q_1 = 1$
$Q_2 = x$
$Q_3 = x^2+2$
$P_0 = 1$
$P_1 = x$
$P_2 = x^2+1$
$P_3 = x^3+3x$

bo teza. □

TW.1 (a) $$\frac{Q_{2n}}{P_{2n}} < \varphi < \frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1}}, \quad n \geq 0, \text{ na } (0,+\infty) \qquad (7)$$

(b) $$\left|\varphi - \frac{Q_n}{P_n}\right| < \frac{n!}{P_n P_{n+1}}, \quad n \geq 0, \text{ na } (0,+\infty) \qquad (8).$$

D-D. (a) $$\varphi(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt \underset{cPP}{=} e^{x^2/2} \int_0^\infty e^{-(t+x)^2/2}\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-xt-t^2/2}\, dt.$$

Stąd
$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-xt-t^2/2}\, dt,$$

więc w szczególności
$$(-1)^n \varphi^{(n)}(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem
$$P_{2n}\varphi - Q_{2n} = \varphi^{(2n)} > 0 \underset{x>0}{\iff} \varphi > \frac{Q_{2n}}{P_{2n}},$$
$$P_{2n+1}\varphi - Q_{2n+1} = \varphi^{(2n+1)} < 0 \underset{x>0}{\iff} \varphi < \frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1}}.$$

(b) Liczymy z (a) i lm 3
$$0 < \varphi - \frac{Q_{2n}}{P_{2n}} < \frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1}} - \frac{Q_{2n}}{P_{2n}} = \frac{(2n)!}{P_{2n} P_{2n+1}},$$
$$0 < \frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1}} - \varphi < \frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1}} - \frac{Q_{2n+2}}{P_{2n+2}} = \frac{(2n+1)!}{P_{2n+1} P_{2n+2}}. \quad \square$$

PRZYK. $n=0$ $$0 < \varphi(x) < \frac{1}{x}$$
$n=1$ $$\frac{x}{x^2+1} \leq \varphi(x) < \frac{x^2+2}{x^3+3x}.$$
tu już się trochę trzeba namęczyć

[illegible]

WN.1 Punktowo $\frac{Q_n}{P_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$.
z (b)

D-D. $$P_n P_{n+1} = P_n(xP_n + nP_{n-1}) = x\overbrace{P_n}^{}(xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2}) + nP_nP_{n-1} > (x^2+n)P_nP_{n-1}$$
$$> \dots > (x^2+n)\cdot\ldots\cdot(x^2+1)\underbrace{P_1 P_0}_{x} > x^3\, n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

więc $$\frac{n!}{P_n P_{n+1}} < \frac{1}{x^3 \sum_1^n \frac{1}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \square$$
bardzo wolno.

WN.2 $\varphi(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{x + \cfrac{4}{x + \dots}}}}}$, $x > 0$.

Rozważmy (algebraicznie) $R_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{2}{a_3 + \cfrac{3}{a_4 + \dots + \cfrac{n-1}{a_n}}}}} = \frac{A_n}{B_n}$.

Wyprowadzamy wzory rekurencyjne na A_n, B_n. Mamy

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a_1} \qquad A_1 = 1, \qquad B_1 = a_1$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} \qquad A_2 = a_2, \qquad B_2 = a_2 a_1 + 1$$

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{2}{a_3}}} = \frac{1}{a_1 + \frac{a_3}{a_3 a_2 + 2}}$$

$$= \frac{a_3 a_2 + 2 \cdot 1}{a_3(a_2 a_1 + 1) + 2a_1} \qquad A_3 = a_3 \underbrace{a_2}_{A_2} + 2 \cdot 1 \qquad B_3 = a_3 \underbrace{(a_2 a_1 + 1)}_{B_2} + 2a_1$$

Ogólnie, teza indukcyjna, to
$$A_{n+1} = a_{n+1} A_n + n A_{n-1}$$
$$B_{n+1} = a_{n+1} B_n + n B_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Dla $n=2$ już sprawdzone. Załóżmy dla n. Zauważmy, że R_{n+2} powstaje z R_{n+1} przez zastąpienie a_{n+1} przez $a_{n+1} + \frac{n+1}{a_{n+2}}$. Zatem

$$R_{n+2} = \frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} \underset{\substack{\text{zał. ind.}\\ \text{- wzór na } \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}}}{=} \frac{\left(a_{n+1} + \frac{n+1}{a_{n+2}}\right) A_n + n A_{n-1}}{\left(a_{n+1} + \frac{n+1}{a_{n+2}}\right) B_n + n B_{n-1}}$$

$$= \frac{a_{n+2}(a_{n+1} A_n + n A_{n-1}) + (n+1) A_n}{a_{n+2}(a_{n+1} B_n + n B_{n-1}) + (n+1) B_n} \underset{\text{zał. ind.}}{=} \frac{a_{n+2} A_{n+1} + (n+1) A_n}{a_{n+2} B_{n+1} + (n+1) B_n}$$

B_n, B_{n-1} – zależą tylko od $a_1, \dots, a_n$ – się nie zmieniły

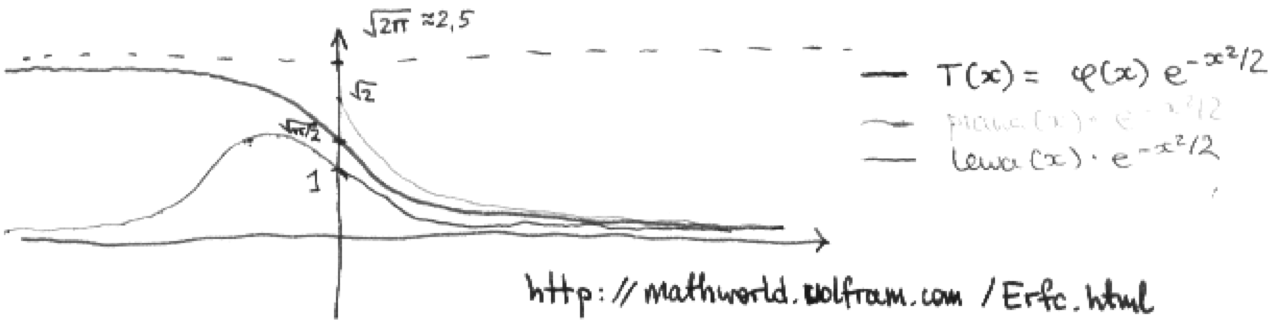
U nas $a_1 = a_2 = \dots = x$, więc

$$\begin{cases} A_1 = 1 = Q_1, \quad B_1 = x = P_1 \\ A_2 = x = Q_2, \quad B_2 = x^2 + 1 = P_2 \\ A_{n+1} = x A_n + n A_{n-1} \\ B_{n+1} = x B_n + n B_{n-1} \end{cases} \Rightarrow A_n = P_n, \quad B_n = Q_n \quad (\text{lm. } 2)$$

Zatem
$$R_n = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{\ddots + \cfrac{n}{x}}}}} = \frac{Q_n}{P_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi. \qquad \square$$
(poprzedni wniosek)

Koniec algebry. Poszacujmy trochę. Jest smutne, że poprzednie górne oszacowania na φ to funkcje wymierne wybuchające w $x \approx 0$. Zaradził temu Komatsu ([Ito-McKean], str. 17]).

TW2 ("well known Komatsu estimates")
$$\underset{= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+4}-x)}{\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}} \underset{x\in\mathbb{R}}{<} \varphi(x) \underset{x\geq 0}{\leq} \underset{= \sqrt{x^2+2}-x}{\frac{2}{x+\sqrt{x^2+2}}}.$$



http://mathworld.wolfram.com/Erfc.html

D-D. Najpierw dla $x>0$. Oznaczmy lewą stronę przez φ_-, prawą przez φ_+.

Mamy
$$\varphi' = x\varphi - 1,$$
$$\varphi_+' = (\sqrt{x^2+2}-x)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - 1 < x \cdot \frac{2}{x+\sqrt{x^2+2}} - 1 = x\varphi_+ - 1$$
$$\cancel{\varphi_-' = -\frac{2\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)}{(x+\sqrt{x^2+4})^2} = -\varphi_- \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}} = -\varphi_-\sqrt{x^2+4}}$$
$$\cancel{= -\varphi_-\Big(\underbrace{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}}_{1/\varphi_-} - x + \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\Big) < -\varphi_-\left(\frac{1}{\varphi_-}-x\right) =}$$
$\vee$
$1/\varphi_- - x > 0$

$$\varphi_-' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\text{upr.}}{\frac{4x}{x+\sqrt{x^2+4}}} - 2 + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4x}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(2x\varphi_- - 2 + \underbrace{\frac{4x^2+4x\sqrt{x^2+4} + x^2 + x\sqrt{x^2+4} - 4x\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}\,(x+\sqrt{x^2+4})}}_{\text{licznik } = 2(x^2+2-x\sqrt{x^2+4}) > 0}\Big) > x\varphi_- - 1.$$

Zatem wprowadzając $h_+ = \varphi_+ - \varphi$, $h_- = \varphi - \varphi_-$ dostajemy

$$h_+' < x h_+ \quad , \quad h_-' < x h_- .$$

Na przykładzie pierwszej nierówności pokażemy, że z tego już wynika $h_+, h_- > 0$, czyli teza.

Mamy

$$\left(h_+ e^{-x^2/2}\right)' = h_+' e^{-x^2/2} - x h_+ e^{-x^2/2} = \left(h_+' - x h_+\right) e^{-x^2/2} < 0,$$

więc

$$h_+ e^{-x^2/2} \quad \text{jest malejąca},$$

czyli

$$h_+(x) e^{-x^2/2} > \lim_{y\to\infty} h_+(y) e^{-y^2/2} = 0$$

h_+ jest ograniczona, bo

$$0 < \varphi_+, \varphi < \frac{1}{x}.$$

Pozostaje udowodnić lewą nierówność dla $x \leq 0$. Ta się korzysta z

$$\varphi_+ e^{-x^2/2} \leq \sup_{x\leq 0} \varphi_+ e^{-x^2/2} \underset{\substack{\text{dłubanie,}\\ \text{por. [Tko, Lm 2]}}}{\leq} \frac{1}{2} = T(0) \underset{x\leq 0}{\leq} T(x). \quad \square$$

Można to dowodnić zupełnie inaczej, jak [Kouba, Cor. 9], dostając nawet lepsze oszacowanie z góry - Szarka i Wernera [Sza-Wer, Prop 3].

TW 3 (Komatsu- Szarek- Werner estimate)

$$\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}} \underset{x\in\mathbb{R}}{<} \varphi(x) \underset{x>-1}{<} \frac{4}{3x+\sqrt{x^2+8}}.$$

D-D. Będzie potrzebny, sam w sobie ciekawy

LM 4. $\varphi^{(n)}\varphi^{(n+2)} - \left(\varphi^{(n+1)}\right)^2 > 0$, $n \geq 0$, na $\mathbb{R}$, tzn

$$x \longmapsto \ln|\varphi^{(n)}(x)| \quad \text{jest ściśle wypukła na } \mathbb{R}.$$

D-D lm. Było już (w tw. 1)

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-tx - t^2/2}\, dt$$

(więc w szczególności $\varphi^{(n)}(x)$ ma stały znak). Zatem

$$(-1)^n \left(\lambda^2 \varphi^{(n+2)}(x) + 2\lambda \varphi^{(n+1)}(x) + \varphi^{(n)}(x) \right)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda - t)^2 t^n e^{-tx - t^2/2}\, dt > 0,$$

więc delta jest ujemna

$$4\left(\varphi^{(n+1)}\right)^2 - 4\varphi^{(n+2)}\varphi^{(n)} < 0. \quad \square$$

D-D tw. • Stosujemy lm dla $n=0$

$$0 < \varphi\varphi'' - (\varphi')^2 = \varphi(x\varphi - 1)' - (x\varphi - 1)^2$$

$$= \varphi(\underbrace{\varphi + x(x\varphi - 1)}_{\varphi'' = (x^2+1)\varphi - x}) - (x\varphi - 1)^2 = (\varphi)^2 + x^2(\varphi)^2 - x\varphi - x^2(\varphi)^2 + 2x\varphi -$$

$$= (\varphi)^2 + x(\varphi) - 1,$$

więc $\varphi(x)$, jako >0, musi być większe jak dodatni pierwiastek równania $\lambda^2 + x\lambda - 1 = 0$, czyli

$$\varphi(x) > \frac{-x + \sqrt{x^2+4}}{2} = \frac{2}{x + \sqrt{x^2+4}}.$$

• Dla dowodu oszacowania Szarka-Wernera aplikujemy lm dla $n=1$

$$0 < \varphi'\varphi''' - (\varphi'')^2 = (x\varphi - 1)(\underbrace{(x^3+3x)\varphi - x^2 - 2}_{\varphi''' = P_3\varphi - Q_3}) - ((x^2+1)\varphi - x)^2$$

$$= \cancel{x^4\varphi^2} + 3x^2\varphi^2 \cancel{- x^3\varphi} \cancel{- 2x\varphi} \cancel{- x^3\varphi} - 3x\varphi \cancel{+ x^2} + 2 \cancel{- x^4\varphi^2} - 2x^2\varphi^2 - \varphi^2$$

$$+ \cancel{2x^3\varphi} \cancel{+ 2x\varphi} \cancel{- x^2} = (x^2-1)\varphi^2 - 3x\varphi + 2$$

Pierwiastki równania $(x^2-1)\lambda^2 - 3x\lambda + 2 = 0$, to $\dfrac{3x \pm \sqrt{x^2+8}}{2(x^2-1)}$

- $x < -1 \Rightarrow$ oba pierwiastki są ujemne - nic to nie daje
- $x > -1$
  * $|x| < 1 \Rightarrow$  $\Rightarrow \varphi <$ większy pierw $\underset{\text{w tym przypadku}}{=} \dfrac{3x - \sqrt{x^2+8}}{2(x^2-1)} = \dfrac{4}{3x + \sqrt{x^2+8}}$

$*\ |x|>1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi <$ ~~większy~~ mniejszy pierwiastek $\underset{\text{w tym przypadku}}{=} \dfrac{3x-\sqrt{x^2+8}}{2(x^2-1)} = \dfrac{4}{3x+\sqrt{x^2+8}}$

albo $\varphi(x) >$ większy pierw $= \dfrac{3x+\sqrt{x^2+8}}{2(x^2-1)} = \dfrac{4}{3x-\sqrt{x^2+8}} > \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x}$ − niemożliwe $\square$

⚠ 1) Oszacowanie Szarka-Wernera można też udowodnić metodą z tw. 3. Tak też to Szarek i Werner robią w swojej pracy.

2) Widać, że lm. 4 pozwala analogiczną metodą iść w wyższe n i dostać oszacowania na φ za pomocą wielomianów wyższych stopni. Tak też robi Kouba i otrzymuje ciekawy i chyba silny rezultat.

Tw 4 (Kouba) Dla $\begin{cases} A_n = P_n P_{n+2} - (P_{n+1})^2 \\ B_n = P_n Q_{n+2} + P_{n+2} Q_n - 2P_{n+1} Q_{n+1} \end{cases}$ ~~ciekaw~~

zachodzą oszacowania

$$\frac{B_{2m} + (2m)!\sqrt{x^2+8m+4}}{2A_{2m}} \underset{x\in\mathbb{R}}{<} \varphi \underset{x>-\beta_m}{<} \frac{B_{2m+1} - (2m+1)!\sqrt{x^2+8m+8}}{2A_{2m+1}}$$

LITERATURA

[Ito-McKean] K. Ito & H.P. McKean, „Diffusion processes and their simple paths" Springer-Verlag, 1965

[Kouba] O. Kouba, „Inequalities related to the error function", arXiv: math/0607694

Dep. of Math. Syria :)

[Sza-Wer] S. J. Szarek & E. Werner, „A nonsymmetric correlation inequality for Gaussian Measure", J. Multivariate Anal. 68 (1999) 193, 211

Dlaczego nieopublikował?

arXiv: math.FA/9701205

[Tko] T. Tkocz, „Gaussian Measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in $\mathbb{C}^n$", Elect. Comm. in Probab. 16 (2011), 38-49