DOSSIER DE CANDIDATURE
A UN POSTE DE MAITRE DE CONFERENCE

Vincent Millot

Docteur en Mathématiques

Post-doctorant à la Carnegie Mellon University (Pittsburgh, Etats-Unis)

Qualifié en Section 25 et en Section 26.

Lettres de recommandations de la part de :
Haim Brezis (Université Paris 6 et Rutgers University),
Irene Fonseca (Carnegie Mellon University),
Nicola Fusco (Université de Naples),
Giovanni Leoni (Carnegie Mellon University).

Sommaire :

CURRICULUM VITAE

État Civil :

Vincent MILLOT
Né le 20 juillet 1977 à Amiens, France
Nationalité française

Situation professionnelle : Post-doctorant, Carnegie Mellon University (Pittsburgh, États-Unis)

Adresse personnelle : 2501 Liberty Avenue ♯3C, Pittsburgh PA 15222, USA
Tél. (pers.) **:** (412) 378 44 17

Adresse professionnelle : Department of Mathematical Sciences, Carnegie Mellon University, Pittsburgh PA 15213-3890, USA
Tél. (prof.) **:** (412) 268 84 83
e-mail : `vmillot@andrew.cmu.edu`
Page web : `www.math.cmu.edu/~vmillot/`

Formation :

• Février 2007 : **Qualification** en Section **25**, numéro de qualification : 07225171047

• Février 2006 : **Qualification** en Section **26**, numéro de qualification : 06226171047

• 2001–2005 : **Doctorat** de l'Université Paris VI, spécialité **Mathématiques Appliquées**, sous la direction de Haim Brezis. Thèse intitulée :

“ *Quelques problèmes variationnels issus de la physique de la matière condensée* ”

soutenue le 8 juin 2005 au Laboratoire J.L.Lions de l'Université Paris VI.
Mention : *Très honorable.*
Composition du jury : H. Brezis (président), A. Aftalion, X. Cabré, J.I. Díaz, H. Le Dret et P. Mironescu.
Rapporteurs : E. Sandier et I. Shafrir.

• 2000–2001 : **DEA** d'Analyse numérique, Université Paris VI.

• 1997–2000 : **Licence, Maîtrise** de Mathématiques Appliquées, Université Paris VI.

• 1995–1997 : **DEUG** MIAS, Université de Picardie Jules Verne.

Expérience :

• 01/09/2005–31/08/2007 : **Post-doctorat**, Carnegie Mellon University
Encadrement : Irene Fonseca et Giovanni Leoni.

• 01/06/2006–30/06/2006 : **Visite de recherche**, S.I.S.S.A. (Italie).

• 01/09/2003–31/08/2004 : **ATER** (complet), Université de Picardie Jules Verne.

• 01/12/2004–31/01/2005 et 01/03/2004–31/03/2004 : **Stage pré-doctoral**, RTN *Fronts–Singularities*, Technion (Israël), sous la direction de Itai Shafrir.

• 01/10/2004–30/11/2004 et 01/10/2002–31/12/2002 : **Stage pré-doctoral**, RTN *Fronts–Singularities*, Universidad Complutense (Espagne), sous la direction de J. Ildefonso Díaz.

Thèmes de recherche :

Cadre général : Equations aux dérivées partielles; Calcul des variations; Théorie géométrique de la mesure; Applications à la physique de la matière condensée et à la mécanique.

Thèmes précisés: Γ-convergence; Relaxation; Homogénéisation; Équations de Ginzburg-Landau; Problèmes de perturbation singulière; Transitions de phases; Problèmes aux discontinuités libres.

Enseignements :

Carnegie Mellon University :

• 2006–2007 : Cours *Calculus II*, 2$^{\text{ième}}$ année Sciences Sociales

• 2005–2006 : Cours *Intégration et équations différentielles*, 2$^{\text{ième}}$ année Sciences

Université de Picardie :

• 2003–2004 : Cours et TD *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, DESS ingénierie (MAI)

• 2003–2004 : TP *Implémentation numérique*, Licence Mathématiques

• 2003–2004 : TD *Théorie de l'intégration*, Licence Mathématiques

• 2003–2004 : TD *Algèbre linéaire et Analyse*, DEUG 2 MIAS

• 2003–2004 : TD *Statistiques*, DEUG 1 Psychologie

Université Paris I :

• 2001–2002 : TD *Mathématiques*, DEUG 2 Sciences Économiques

Langues étrangères :

Anglais : très bon niveau lu, écrit et parlé;

Espagnol : très bon niveau lu, écrit et parlé.

PUBLICATIONS

Articles parus dans des revues à comité de lecture :

[P1] V. Millot : *Energy with weight for S^2-valued maps with prescribed singularities*, Calc. of Var. and Partial Differential Equations **24** (2005), 83–109.

[P2] V. Millot : *The relaxed energy for S^2-valued maps and measurable weights*, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire **23** (2006), 135–157.

[P3] R. Ignat, V. Millot : *The critical velocity for vortex existence in a two-dimensional rotating Bose-Einstein condensate*, J. Funct. Anal. **233** (2006), 260–306.

[P4] R. Ignat, V. Millot : *Energy expansion and vortex location for a two-dimensional rotating Bose-Einstein condensate*, Rev. Math. Phys. **18** (2006), 119–162.

Articles parus aux Comptes Rendus et Actes de congrès :

[P5] J.I. Díaz, V. Millot : *Coulomb friction and oscillation: stabilization in finite time for a system of damped oscillators*, Actas XVIII CEDYA / VIII CMA, (editors) Public. Univ. of Tarragona, 2003 (8 pages).

[P6] R. Ignat, V. Millot : *Vortices in a 2d rotating Bose-Einstein condensate*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **340** (2005), 571–576.

Articles soumis :

[P7] V. Millot, A. Pisante : *Relaxed energies for $H^{1/2}$–maps with values into the circle and measurable weights.*
Prepublication 06-CNA-009 Carnegie Mellon University (80 pages).
Téléchargeable à l'adresse : `www.math.cmu/cna/pub2006.html`

[P8] V. Millot : *The dipole problem for $H^{1/2}(S^2, S^1)$–maps and application*, soumis comme CRM/AMS proceeding pour le Worshop *Singularités en EDP et dans le calcul des variations*, CRM Montreal (org. S. Alama, L. Bronsard et P. Sternberg), 2006.
Téléchargeable à l'adresse : `www.math.cmu/~vmillot/`

Articles en préparation :

[P9] I. Fonseca, N. Fusco, G. Leoni, V. Millot : *Optimal shape of material voids for anisotropic surface energy* (en cours de rédaction).

[P10] J.F. Babadjian, V. Millot : *Homogenization of variational problems with manifold constraints* (en cours de rédaction).

COMMUNICATIONS

Conférences sur invitation :

1. *Conference on Applied Analysis on the Occasion of the 65th Birthday of David Kinderlehrer, contributed talk*, Carnegie Mellon University (Etats-Unis), Octobre 2006.

2. *AMS Meeting, Session "Nonconvex Variational Problems: Recent Advances and Applications"*, University of Salt Lake City (Etats-Unis), Octobre 2006.

3. *SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, Session "Contemporary Developments in Calculus of Variations and PDE"*, Boston (Etats-Unis), Juillet 2006.

4. *AMS Meeting, Session "Calculus of Variations"*, University of Nebraska (Etats-Unis), Octobre 2005.

5. *Conférence "Frontiers of Applied Analysis", contributed talk*, Carnegie Mellon University (Etats-Unis), Septembre 2005.

6. *Conférence "Degenerate Quantum Gases"*, Fondation des Treilles, Juillet 2005.

7. *Conférence "Journées Ginzburg-Landau"*, Université Paris XII, Avril 2005.

8. *Conférence "Nonlinear Partial Differential Equations describing Front Propagation and other Singular Phenomena"*, Lorentz Center, University of Leiden (Pays-Bas), Novembre 2004.

9. *Conférence "Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones"*, University Rovira i Virgili (Espagne), Septembre 2003.

Workshops sur invitation :

10. *Workshop "Singularités en EDP et dans le calcul des variations"*, Centre de Recherche Mathématiques, Montreal (Canada), Juillet 2006.

11. *Workshop "The Calculus of Variations in 2005"*, Carnegie Mellon University (Etats-Unis), Octobre 2005.

12. *Workshop "Singularities Phenomena in Elliptic and Parabolic Equations"*, Technion (Israël), Mars 2004.

Séminaires sur invitation :

13 *Séminaire "PDE/Analysis"*, McMaster University (Canada), Février 2007.

14. *Séminaire "Applied Mathematics"*, S.I.S.S.A. (Italie), Juin 2006.

15. *Séminaire "Applied Mathematics"*, University of Pittsburgh (Etats-Unis), Décembre 2005.

16. *Séminaire "Nonlinear Analysis"*, Rutgers University (Etats-Unis), Novembre 2005.

17. *Séminaire "Homogénéisation"* (sur proposition de ma part), Université Paris VI, Juin 2005.

18. *Séminaire "PDE and Applied Mathematics"*, Technion (Israël), Janvier 2005.

19. *Séminaire "Applied Mathematics"*, University Complutense of Madrid (Espagne), Novembre 2004 et Janvier 2003.

20. *Séminaire "Applied Mathematics"*, Institute of Mathematics of the Romanian Academy (Roumanie), Juin 2004.

21. *Séminaire "Analyse non linéaire"*, Université Paris VI, Mai 2004.

22. *Séminaire "Analyse Appliquée"*, Université de Picardie, Octobre 2003.

ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT

J'ai effectué une année comme ATER à temps complet à l'Université de Picardie Jules Vernes de septembre 2003 à août 2004. Lors du premier semestre, j'ai été chargé du cours de mathématiques pour le DESS ingénierie (anciennement DESS MAI). Au deuxième semestre, j'ai été chargé de travaux dirigés/pratiques en Licence et DEUG de mathématiques ainsi que de travaux dirigés en Statisques pour des étudiants en première année de Psychologie. Lors du premier semestre de l'année universitaire 2001-2002, j'ai également été chargé de travaux dirigés en mathématiques pour des étudiants de deuxième année en Sciences Economiques à l'Université Paris I en tant que vacataire. Lors de mon séjour post-doctoral à la Carnegie Mellon University, j'ai obtenu la charge complète de deux cours ce qui m'a permis de participer pleinement aux activités académiques du département telle que l'organisation d'examens ou le suivi personnalisé des étudiants. Le premier cours était destiné à des étudiants de deuxième année de la filière Sciences et le deuxième cours à des étudiants de deuxième année de la filière Sciences Sociales. J'ai donc pu, au cours de ces années, diversifier mes thèmes d'enseignement et élargir mon expérience pédagogique aux contact d'une population diverse d'étudiants.

Détails des enseignements :

Aux Etats-Unis, Carnegie Mellon University (post-doctorat) :

• ***"Calculus II"***, cours de 2$^{\text{ième}}$ année en Sciences Sociales, Responsable de l'unité d'enseignement, Premier semestre 2006-2007.
Charge horaire : 3 heures de cours par semaine, 2 heures d'accueil des étudiants par semaine
Programme : Intégration de fonctions d'une variable réelle, intégrale de Riemann. Méthodes d'intégration, intégrales géométriques. Intégrales impropres. Fonctions de plusieurs variables, continuité et différentiabilité. Problèmes d'optimisation et applications. Optimisation sous contraintes, multiplicateurs de Lagrange.

• ***"Intégration et équations différentielles"***, cours de 2$^{\text{ième}}$ année en Sciences, Responsable de l'unité d'enseignement, Deuxième semestre 2005-2006.
Charge horaire : 3 heures de cours par semaine, 2 heures d'accueil des étudiants par semaine
Programme : Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses. Primitives. Sommes de Riemann, Intégrale de Riemann. Méthodes d'intégration: intégration par partie, changement de variable, intégration de fonctions rationnelles. Calcul de longueurs. Intégrales impropres. Intégration numérique: méthode de Simpson et du trapèze. Équations différentielles séparables, équations différentielles linéaires du premier ordre. Équations différentielles de second ordre homogènes.

En France, Université de Picardie (ATER) :

• ***"Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles"***, DESS MAI, Co-responsable de l'unité d'enseignement avec Mohammed Guedda, Premier semestre 2003-2004.
Charge horaire : 2 heures de cours par semaine, 2 heures de TD par semaine

Programme : Rappels d'analyse matricielle, théorie spectrale, suites et séries de matrices. Quelques modèles mathématiques, l'équation de la chaleur stationnaire et en évolution, l'équation des ondes. La méthode des différences finies. Schémas explicites et implicites. Consistance d'un schéma numérique et condition de stabilité. Algorithmes de résolution de systèmes linéaires. Introduction à l'analyse d'erreurs.

• **TP** ***"Implémentation numérique"*** (Maple), Licence de mathématiques, Deuxième semestre 2003-2004.
Charge horaire : 2 heures de TP par semaine
Programme : Interpolation polynomiale. Approximation polynomiale. Méthodes numériques pour la résolution de $f(x) = 0$. Méthodes numériques pour le calcul intégral. Suites récurrentes, vitesse de convergence, accélération de convergence.

• **TD** ***"Théorie de l'intégration"***, Licence de mathématiques, Deuxième semestre 2003-2004.
Charge horaire : 2 heures de TD par semaine
Programme : Théorie de la mesure: tribu, mesures positives. Construction de la mesure de Lebesgue. Construction de l'intégrale de Lebesgue: fonctions étagées, fonctions mesurables et intégrables. Espaces L^p. Théorèmes de convergence: convergence monotone et convergence dominée. Applications aux intégrales à paramètres.

• **TD** ***"Algèbre linéaire et analyse"***, DEUG 2 MIAS, Deuxième semestre 2003-2004.
Charge horaire : 2 fois 2 heures de TD par semaine
Programme : *Algèbre :* Réduction de matrices, exponentielle de matrices. Applications à la résolution de systèmes différentiels linéaires et de récurrences linéaires. *Analyse :* Eléments de topologie, espaces métriques, espaces vectoriels normés. Suites, limites, continuité, continuité uniforme. Espaces complets, compacts, connexes et connexes par arcs. Différentiabilité, dérivées partielles. Difféomorphismes, inversion locale. Formules de Taylor. Extrema locaux.

• **TD** ***"Statistiques"***, DEUG 1 Psychologie, Deuxième semestre 2003-2004.
Charge horaire : 2 fois 1 heure de TD par semaine
Programme : Typologie des variables et représentation graphique des données. Notions d'échantillon et de population. Théorie des tests. Comparaison de moyennes, analyse de variance. Comparaison de fréquences, test du $\chi 2$. Corrélation.

En France, Université Paris I (vacation) :

• **TD** ***"Mathématiques"***, DEUG 2 Sciences Economiques, Premier semestre 2001-2002.
Charge horaire : 3 fois 2 heures de TD par semaine
Programme : Inversion de matrices et résolution de systèmes linéaires. Valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation et réduction de matrices. Rappels sur la notion de continuité. Fonctions de plusieurs variables. Calcul différentiel et dérivées partielles. Optimisation: minima et maxima de fonctions de plusieurs variables. Optimisation sous contraintes, multiplicateurs de Lagrange.

DESCRIPTION DES TRAVAUX DE RECHERCHE

1. Résumé des travaux effectués pendant la thèse

Ma thèse de doctorat a été réalisée au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) sous la direction de Haim Brezis. Cette thèse est composée de quatre parties traitant de problèmes issus du Calcul des Variations et des Equations aux Dérivées Partielles non linéaires. Les questions adressées ont pour origine la physique de la matière condensée et la mécanique.

1.1. Applications à valeurs dans S^2, connexions minimales et énergies relaxées

Ces dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des espaces de Sobolev à valeurs dans une variété, tout particulièrement dans le cadre de la théorie des cristaux liquides [11,20]. Dans nos travaux [P1] et [P2], nous avons considéré l'espace $H^1(\Omega, S^2)$ où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$. L'influence de la topologie de la sphère S^2 sur la structure de cet espace est déjà bien comprise. En particuliers, il est connu que le sous espace des applications régulières n'est dense que pour la topologie faible [6]. Notre objectif était de quantifier en termes d'énergie le *défaut d'approximation forte*. Nous avons considéré différentes énergies issues d'opérateurs linéaires de second ordre.

Dans [P1], nous avons calculé l'infimum de l'énergie $E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 w(x)dx$ sur la classe des applications $u : \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \to S^2$ régulières et constantes sur le bord du domaine. Les points a_i sont des singularités prescrites de u et le degré topologique de u autour de a_i est également fixé, c'est à dire $\deg(u, a_i) = d_i \in \mathbb{Z}^*$ avec $\sum_i d_i = 0$. En d'autres termes, cette contrainte revient à prescrire le Jacobien de u sous la forme $J(u) = 4\pi \sum_i d_i \delta_{a_i}$. La fonction w est supposée mesurable et bornée inférieurement et supérieurement par deux constantes positives.

Dans le cas $w \equiv 1$, Brezis, Coron & Lieb [11] ont montré que l'infimum est égal à $8\pi L$ où L est la longueur d'une connexion minimale de la configuration $(a_i, d_i)_{i=1}^n$ relative à la distance géodésique dans Ω. Cette quantité correspond à la masse totale du Jacobien prescrit dans une certaine norme duale. D'après Almgren, Browder & Lieb [4] et Giaquinta, Modica & Souček [18]), la longueur d'une connexion minimale L peut également être interprétée en termes de courants Cartésiens comme la masse minimale de tout 1-courant rectifiable dans Ω de bord $4\pi \sum_i d_i \delta_{a_i}$.

Ce résultat peut facilement être étendu au cas d'une fontion w régulière en remplaçant la distance Euclidienne par la métrique conforme de facteur w. Lorsque w est supposée juste mesurable, le problème devient non trivial puisque w n'induit aucune métrique naturelle. Pourtant nous avons montré que le résultat reste vrai pour une certaine métrique de Finsler d_w associée à w au travers d'une certaine équation eikonale.

Notre résultat nous a ensuite permis de calculer explicitement dans [P2], la relaxée par rapport à la convergence faible de H^1, de la fonctionnelle $F(v)$ définie pour $v : \Omega \to S^2$ par $F(v) = E(v)$ si v est régulière et $F(v) = +\infty$ sinon. La formule explicite fait intervenir la longueur d'une connexion minimale relative à la distance d_w connectant les singularités topologiques de v et généralise une formule antérieure établie par Bethuel, Brezis & Coron [7]. Nous avons également obtenu différents résultats de stabilité de cette relaxation par rapport à des perturbations de la fonction w.

1.2. Condensation de Bose-Einstein et tourbillons de Ginzburg-Landau

Collaborateur : R. Ignat (Université Paris VI)

Dans nos travaux [P3] et [P4], nous avons étudié un problème qui nous a été proposé par Aftalion et un groupe de physiciens du Laboratoire Kastler-Brossel à l'ENS sur un modèle de condensat de Bose-Einstein en rotation.

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein a donné lieu à d'intensives recherches depuis sa première réalisation dans les gaz alcalins en 1995. Une des expériences les plus intéressantes a été réalisée par le groupe de l'ENS. Elle consistait à mettre en rotation le piège regroupant les atomes [21,22] (voir également [1]). Un condensat de Bose-Einstein est un gaz quantique et il peut donc être décrit par une unique fonction d'onde complexe. Lorsque le condensat est mis en rotation, il se comporte comme un superfluide : au dessus d'une certaine vitesse critique de rotation, le condensat développe des tourbillons, c'est à dire des zéros de la fonction d'onde autour desquels il y a une circulation de phase.

Dans une expérience où un piège harmonique regroupe fortement les atomes dans le plan orthogonal à l'axe de rotation, l'analyse mathématique devient bidimensionnelle [13,14,27]. Nous avons considéré le modèle 2D utilisé dans [13,14]. Dans une forme adimensionnelle de l'énergie (Aftalion & Du [3]), la fonction d'onde minimise la fonctionnelle de Gross-Pitaevskii (GP)

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\left[(|\psi|^2-a(x))^2-(a^-(x))^2\right]-\Omega x^\perp\cdot(i\psi,\nabla\psi)\right\}dx$$

sous la contrainte de masse $\int_{\mathbb{R}^2}|\psi|^2=1$. Ici, $\varepsilon>0$ est un petit paramètre représentant le rapport de deux longueurs caractéristiques et $\Omega=\Omega(\varepsilon)\geq 0$ est la vitesse de rotation. Dans le cas d'un piège harmonique, le potentiel a est de la forme $a(x)=a_0-x_1^2-\Lambda x_2^2$ où $\Lambda\in(0,1]$ est un paramètre fixé d'anisotropie et la constante a_0 est déterminée par la condition $\int_{\mathbb{R}^2}a^+(x)=1$.

L'énergie GP présente certaines similarités avec l'énergie de Ginzburg-Landau (GL) de la supraconductivité dans le régime κ grand. Dans ce cadre, nos travaux [P3] et [P4] se rapprochent des études sur GL de Bethuel, Brezis & Hélein [8] et Sandier & Serfaty [25,26,28,29].

Notre but dans [P3] était dans un premier temps d'étudier le profil de densité du condensat obtenu par minimisation de l'énergie GP parmi les fonctions scalaires positives. Nous avons montré une décroissance exponentielle de la densité à l'infini et obtenu des estimations de convergence vers le profil de Thomas-Fermi $\sqrt{a^+}$ dans la limite $\varepsilon\to 0$. Puis nous avons déterminé, toujours dans l'asymptotique $\varepsilon\to 0$, la vitesse critique de rotation Ω_1 au delà de laquelle tout minimiseur de l'énergie GP a au moins un tourbillon. Une grande partie de notre analyse est également consacrée à la preuve d'une borne a priori de l'énergie pour des régimes de rotation proches de Ω_1. Cette borne sur l'énergie était un point essentiel pour étudier la structure des tourbillons dans [P4].

Dans [P4], nous avons tout d'abord obtenu une estimation dans la limite $\varepsilon\to 0$ de la vitesse de rotation critique Ω_d pour laquelle exactement d tourbillons sont présents dans le condensat. En calculant progressivement un développement asymptotique de l'énergie, nous avons ensuite montré que chaque tourbillon à une circulation de phase égale à 2π. Ce développement d'énergie nous a également permis de localiser les tourbillons dans le condensat. Plus précisément, nous avons montré que les tourbillons se répartissent autour du centre du condensat comme une configuration minimisante d'une certaine énergie renormalisée explicite.

Ces résultats confirment l'étude plus formelle de Castin & Dum [14] et coincident avec leurs résultats numériques.

Cette étude sera adressée lors d'une audition éventuelle.

1.3 Effet d'ancrage des singularités limites pour une énergie de type Ginzburg-Landau

Dans cette partie de la thèse, nous avons étudié les minimiseurs d'une fonctionnelle de Ginzburg-Landau de la forme

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a_\varepsilon(x)}{4\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2 \right\} dx$$

définie pour $u \in H^1_g(\Omega, \mathbb{R}^2)$ où Ω est un domaine borné régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, la fonction $g : \partial\Omega \to S^1$ est donnée régulière de degré topologique $d > 0$ et $\varepsilon > 0$. La fonction de poids $a_\varepsilon(x)$ est de la forme $a_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\alpha}$ si $x \in \Omega^+$, $a_\varepsilon(x) = 1$ si $x \in \Omega^-$, où $\alpha > 0$ est une constante, Ω^+ et Ω^- sont deux ouverts disjoints de Ω tels que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega^-}$. L'interface $\Sigma := \overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-}$ est supposée être une courbe régulière.

Comme dans les travaux de Bethuel, Brezis & Hélein [8] dans le cas $a_\varepsilon \equiv 1$, le comportement asymptotique des minimiseurs u_ε est déterminé lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous avons obtenu un résultat similaire avec un effet additionnel d'ancrage des singularités limites. Plus précisément, nous avons montré que u_ε converge à une sous-suite près vers une application harmonique u_0 à valeurs dans S^1 de la forme

$$u_0(z) = \frac{z-a_1}{|z-a_1|} \cdots \frac{z-a_d}{|z-a_d|}\, e^{i\varphi(z)}$$

où $a_1, \ldots, a_d$ sont d points distincts de $\Omega^- \cup \Sigma$, $\Delta\varphi = 0$ dans Ω et $u_0 = g$ sur $\partial\Omega$. La position des singularités est également déterminée au moyen de l'énergie renormalisée introduite dans [8] restreinte au sous-ensemble Ω^-. Notre approche repose sur une combinaison des méthodes de [8] avec une analyse fine par “blow-up” près de l'interface Σ.

1.4 Stabilisation en temps fini : frottement sec versus frottement visqueux

Collaborateur : J.I. Díaz (Universidad Complutense de Madrid, Espagne)

Dans [P5], nous avons présenté un premier ensemble de résultats sur la stabilisation en temps fini de processus mécaniques où un terme de frottement de Coulomb (ou frottement sec) coexiste avec d'autres phénomènes physiques provoquant l'oscillation du système si le frottement n'est pas présent. De telles situations apparaissent dans de nombreuses formulations. La plus simple correspond à un oscillateur harmonique sujet à un frottement solide et à un frottement visqueux, $\ddot{x}(t)+x(t)+\beta(\dot{x}(t))+g(\dot{x}(t)) \ni 0$, et dans un cadre plus complexe, nous avons l'équation de la corde vibrante amortie,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \beta(u_t) + g(u_t) \ni 0 \quad \text{in } (0,1)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Ici, β est le graphe maximal monotone de $\mathbb{R}^2$, $\beta(r) = \text{signe}(r)$ si $r \neq 0$ et $\beta(0) = [-1,1]$, et g est une fonction Lipschitz satisfaisant $[\beta(r)+g(r)]r > 0$ for $r \neq 0$.

Nous avons concentré notre étude sur des systèmes dynamiques de dimension finie pouvant être obtenus soit par discrétisation spatiale de la corde vibrante, soit par la modélisation de N oscillateurs couplés. Notre objectif principal était de montrer que la fonction g peut être à l'origine d'une distinction qualitative entre les différentes orbites du système. Plus précisement, en fonction des données initiales, le système peut atteindre son état d'équilibre en temps fini ou de façon asymptotique, c'est à dire lorsque $t \to \infty$. Cette situation est en contraste avec le phénomène d'extinction en temps fini pour les équations non linéaires ordinaires ou paraboliques de premier ordre en temps [5]. Nous avons également montré que cette alternative a lieu pour l'équation de la corde vibrante amortie.

Ce travail a été effectué dans le cadre du RTN *Front-Singularities* lors de mon séjour pré-doctoral à l'Universidad Complutense de Madrid.

2. Résumé des travaux récents

Les travaux suivants ont été réalisés lors de mon séjour post-doctoral à la Carnegie Mellon University. Le premier de ceux-ci se place dans la continuité de mes recherches effectuées pendant la thèse ([P1] et [P2]). Les deux suivants constituent un nouveau champ de recherche dont l'esprit général est l'application des méthodes modernes du Calcul des Variations à des problèmes issus de la mécanique.

2.1. L'espace de Sobolev $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2, S^1)$, connexions minimales et énergies relaxées

Collaborateur : A. Pisante (University of Rome "La Sapienza", Italie)

Motivités par de récents travaux de Bourgain, Brezis & Mironescu [10] sur l'espace $H^{1/2}(S^2, S^1)$ et l'équation de Ginzburg-Landau, nous avons étudié dans [P5] un problème de minimisation dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2, S^1)$ rattaché aux questions de densité des fonctions régulières (voir Rivière [24]). L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2, S^1)$ correspond à la classe des applications $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telles que $|g| = 1$ p.p. et

$$|g|^2_{1/2} := \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x-y|^3}\, dxdy < \infty\,.$$

Nous avons considéré sur $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2, S^1)$ une énergie de la forme

$$I_A(g) = \text{Min}\left\{ \int_{\mathbb{R}^3_+} \text{tr}\big(\nabla u\, A(x)(\nabla u)^t\big) dx\ ;\ u \in \dot{H}^1_g(\mathbb{R}^3_+, \mathbb{R}^2) \right\}$$

où A est un champ mesurable sur $\mathbb{R}^3_+$ de matrices symétriques, définies positives, satisfaisant une condition d'uniforme ellipticité. Ce type d'énergies inclut en particulier la seminorme de Gagliardo puisqu'il est bien connu que $|g|^2_{1/2} = I_{\text{Id}}(g)$ à une constante multiplicative près.

Pour des applications ayant un nombre fini de singularités prescrites, nous montrons que l'infimum de $I_A(\cdot)$ est égal à la longueur d'une connexion minimale connectant les singularités, cette longueur étant calculée avec une distance géodésique sur le plan naturellement associée au champ de matrices.

Dans le cas de matrices à coefficients continus, le comportement asymptotique des suites minimisantes est déterminé. Nous avons montré que l'énergie se concentre près d'un 1-courant rectifiable sur le plan, et obtenu la structure de la mesure limite. Une interprétation topologique de cette concentration d'énergie est également donnée en termes de création d'un courant vertical dans le cadre des courants Cartésiens [18,19]. Notre approche des courants de graphes est basée sur une formule de réprésentation du Jacobien $J(g)$ (au sens des courants) en termes de relèvements appropriés de l'application g dans l'esprit de [10].

Ces résultats nous ont ensuite permis de calculer explicitement la relaxée par rapport à la convergence faible de $\dot{H}^{1/2}$, de la fonctionnelle $J(g)$ définie pour $g \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2, S^1)$ par $J(g) = I(g)$ si g est régulière et $J(v) = +\infty$ sinon. Une fois encore, la formule explicite fait intervenir la longueur d'une connexion minimale connectant les singularités topologiques de g.

Ce travail a débuté lors d'une visite de A. PISANTE à l'Université Paris VI en juin 2005 dans le cadre du RTN *Front-Singularities*.

Cette étude sera adréssée lors d'une audition éventuelle.

2.2 Vide matériel et énergies de surface anisotropes: existence et régularité de configurations minimisantes

Collaborateurs : I. FONSECA (Carnegie Mellon University, Etats-Unis), N. FUSCO (University of Naples, Italie), G. LEONI (Carnegie Mellon University, Etats-Unis)

Dans [P9], nous avons considéré une fonctionnelle définie pour des paires fonction-ensemble décrivant l'énergie d'un vide matériel dans un solide linéairement élastique bidimensionnel. Plus précisement, cette fonctionnelle est de la forme

$$F(u, E) = \int_{\Omega \setminus E} A\, e(u) : e(u)\, dx + \int_{\partial E} \varphi(\nu_E) d\mathcal{H}^1$$

où A est la loi de Hooke du matériau, $u : \Omega \setminus E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ représente le déplacement, $e(u)$ désigne son gradient symétrisé et $E \subset \Omega$ modèle le vide matériel. Ici, les ensembles E sont supposés réguliers (c'est à dire Lipschitz) si bien que la frontière topologique coïncide avec la frontière essentielle et la normale extérieure ν_E existe en $\mathcal{H}^1$-presque tous points du bord. La densité d'énergie de surface $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}_+$ est supposée Lipschitz et non dégénérée.

Nous soulignons que ce type d'énergies apparaît également dans des modèles variationnels rattachés à la croissance épitaxiale de films cristallins [9,17], ou encore à la segmentation d'images [23].

Notre étude porte sur l'existence et la régularité de configurations minimisantes de F sous certaines contraintes sur les paires (u, E) admissibles. Une condition de type Dirichlet sur le déplacement est donnée sur le bord extérieur du domaine Ω, nous ajoutons une pénalisation sur le volume du vide matériel E et imposons à celui-ci d'être étoilé par rapport à un point donné. Ce problème peut donc être interprété comme perturbation par une énergie élastique du problème de Wulff.

Afin de garantir l'existence de minimiseurs, nous avons relaxé ce problème à une classe plus large d'ensembles E admissibles (étoilés et de périmètre fini) et calculé l'enveloppe semi-continue inférieure de la fonctionnelle F dans une topologie adaptée. En particuliers, nous avons obtenu un résultat non standard de relaxation provenant de l'hypothèse géométrique sur les ensembles admissibles.

Sous certaines hypothèses sur φ, nous avons ensuite étudié la régularité des configurations minimisantes et montré que la surface libre délimitant le vide matériel est régulière à l'exception d'un nombre fini d'éventuelles fissures ou points de rebroussement. Notre analyse généralise au cas d'une énergie de surface anisotrope une méthode développée dans CHAMBOLLE & LARSEN [15] et FONSECA, FUSCO, LEONI & MORINI [17].

Cette étude sera adressée lors d'une audition éventuelle.

2.3 Homogénéisation et applications de Sobolev à valeurs dans une variété

Collaborateur : J.F. Babadjian (S.I.S.S.A., Italie)

Dans [P10], nous adressons le problème de l'homogénéisation de fonctionnelles variationnelles définies pour des applications à valeurs dans une variété $\mathcal{M}$ donnée. Notre travail est motivé par des problèmes issus de la théorie des cristaux liquides ou du micromagnétisme où typiquement, les paramètres d'ordre prennent leurs valeurs dans une sphère. Nos résultats se placent dans le cadre de la Γ-convergence dans le cas d'une densité d'énergie à croissance surlinéaire ou linéaire. Plus précisement, les fonctionnelles considérées sont de la forme

$$W^{1,p}(\Omega,\mathcal{M}) \ni u \mapsto \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon},\nabla u\right)dx$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, la densité d'énergie f est à croissance p par rapport à la deuxième variable et périodique par rapport à la première, $\varepsilon > 0$ est le paramètre d'homogénéisation et $p \geq 1$.

Dans le cas $p > 1$, nous démontrons qu'une telle famille de fonctionnelles Γ-converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers une fonctionnelle variationnelle dont la densité d'énergie effective est de la forme $f_{\mathrm{hom}}(u,\nabla u)$. Celle-ci est donnée par une formule d'"homogénéisation tangentielle" par analogie avec la notion de quasiconvexification tangentielle introduite par Dacorogna, Fonseca & Trivisa [16].

Dans le cas $p = 1$, la relaxation s'effectue dans l'espace BV des fonctions à variation bornées qui est le domaine limite donné par la Γ-convergence. Nous avons restreint ici notre étude au cas où $\mathcal{M} = S^{d-1}$ est une sphère et obtenu une Γ-limite de la forme

$$BV(\Omega,S^{d-1}) \ni u \mapsto \int_\Omega f_{\mathrm{hom}}(u,\nabla u)dx + \int_\Omega f^\infty_{\mathrm{hom}}\left(u,\frac{D^c u}{|D^c u|}\right)d|D^c u| + \int_{S_u} \vartheta_{\mathrm{hom}}(u^+,u^-,\nu_u)d\mathcal{H}^{N-1}$$

où f^∞_{hom} est la fonction de récession de f_{hom} et l'énergie de surface ϑ_{hom} est déterminée par une formule d'homogénéisation.

Ce travail a été en partie réalisé lors de mon séjour à la S.I.S.S.A. en juin 2006.

PROJETS DE RECHERCHE

1. Micromagnétisme des grands corps

Collaborateurs : G. BOUCHITTÉ (Université de Toulon), I. FONSECA (Carnegie Mellon University, Etats-Unis), G. LEONI (Carnegie Mellon University, Etats-Unis)

Dans ce projet de recherche, nous prévoyons d'étudier le comportement asymptotique de grands corps ferromagnétiques à l'aide de la méthode de Γ-convergence. D'après la théorie sur le micromagnétisme [12], les états d'équilibre d'un corps ferromagnétique $\mathcal{B}$ correspondent aux minimiseurs de l'énergie adimensionnelle

$$E_\varepsilon(m) = \varepsilon \int_\Omega |\nabla m|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \varphi(m) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} |h|^2 dx$$

où $\varepsilon > 0$ est le rapport entre une constante matérielle et la taille du corps, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ représente la région de référence (avec $\mathcal{B} \sim \varepsilon^{-1/2}\Omega$) et $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la magnétisation vérifiant $|m| = 1$ p.p. dans Ω et $m = 0$ en dehors de Ω. Le champ magnétique induit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est rattaché à la magnétisation par les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div}(m+h) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{curl}(h) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

L'intégrande φ est une fonction paire et positive définie sur S^2 et s'annulant en un nombre fini de vecteurs. Les trois termes composant l'énergie sont respectivement appelés énergie d'échange, énergie d'anisotropie et énergie de champ.

Notre objectif est d'étudier la convergence variationnelle de E_ε dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$ ce qui correspond à un corps ferromagnétique de grande taille. Dans cette limite, une compétition entre les différents termes de l'énergie a lieu. Les énergies d'échange et d'anisotropie forcent le corps à exhiber de larges zones d'uniforme magnétisation séparées par de fines couches de transitions alors que l'énergie de champ modèle la tendance de m à avoir une divergence nulle.

Ce problème présente de nombreuses similarités avec les modèles de transition de phases de type Cahn-Hilliard. Pourtant le comportement de E_ε n'est toujours pas bien compris à cause du caractère non local de l'énergie de champ. Une analyse spécifique et le développement de nouveaux outils sont donc nécessaires pour cette étude.

2. Courbe de vorticité dans un modèle 2D de superfluides en rotation rapide

Collaborateurs : S. ALAMA (McMaster University, Canada), L. BRONSARD (McMaster University, Canada)

Dans ce projet, nous nous proposons d'étudier les minimiseurs $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ d'une énergie de Gross-Pitaevskii de la forme

$$\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}(1 - |\psi|^2)^2 - \Omega \nabla^\perp \zeta \cdot (i\psi, \nabla\psi) \right\} dx$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné régulier, $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre et $\Omega = \Omega(\varepsilon) \geq 0$. La fonction donnée $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ est supposée régulière positive avec $\zeta_{|\partial\Omega} = 0$. Ce type d'énergie apparait naturellement dans des modèles de superfluides ou de condensats de Bose-Einstein bidimensionnels en rotation rapide, voir [2,30] et [P3,P4]. D'après ces travaux, la fonction d'onde ψ développe des tourbillons pour des valeurs de Ω supérieure à une certaine valeur critique Ω_1 de l'ordre de $|\ln\varepsilon|$. De plus, ces tourbillons sont asymptotiquement proches dans la limite $\varepsilon \to 0$, de l'ensemble de maximum du potentiel ζ .

Dans un régime où $\Omega = \Omega_1 + O(\ln|\ln\varepsilon|)$ et l'ensemble de maximum de ζ est donné par une courbe régulière Γ, Aftalion, Alama & Bronsard [2] ont montré que le nombre de tourbillons diverge dans la limite $\varepsilon \to 0$ et que leur distribution limite reste supporté par la courbe Γ. L'objectif de ce projet serait de déterminer précisément cette distribution limite de vorticité et d'étudier ses propriétés qualitatives en fonction de la géométrie de Γ. Ce problème correspond à une question laissée ouverte dans [2] et [P3].

Ce projet a débuté lors de ma visite de l'Université McMaster en février 2007.

3. Une approche variationnelle pour le relèvement des fonctions de $H^{1/2}(S^2, S^1)$

Etant donnée une fonction $g \in H^{1/2}(S^2, S^1)$, une question naturelle est de savoir si cette fonction peut être représentée sous la forme $g = e^{i\varphi}$ pour une certaine fonction réelle φ ayant une régularité appropriée. La réponse a été donnée récemment par Bourgain, Brezis & Mironescu [10] : la fonction φ ne peut être choisie de régularité $H^{1/2}$ en général mais se décompose plutôt comme la somme d'une partie $H^{1/2}$ et d'une partie BV. L'exemple $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)/|(x_1, x_2)|$ illustre simplement ce phénomène.

La démonstration de [10] est basée sur des méthodes d'analyse harmonique. Nous proposons ici une approche variationnelle pour le relèvement de $g \in H^{1/2}(S^2, S^1)$ en étudiant l'asymptotique $\varepsilon \to 0$ des minimiseurs de l'énergie

$$E_\varepsilon(\varphi) = \int_{B^3} |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{S^2} \left|e^{i\varphi} - g\right|^2 d\mathcal{H}^2$$

définie pour $\varphi \in H^1(B^3, \mathbb{R})$ où $\partial B^3 = S^2$. Formellement, ce procédé devrait sélectionner de façon énergétique de bons candidats pour le relèvement de g . Notre objectif serait donc d'étudier la limite asymtotique $\varepsilon \to 0$ des minimiseurs de E_ε, les propriétés qualitatives sous-jacentes et enfin de comparer les résultats obtenus avec ceux de [10].

References

[1] J.R. Abo-Shaeer, C. Raman, J.M. Vogels, W. Ketterle, *Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensate*, Science **292** (2001).

[2] A. Aftalion, S. Alama, L. Bronsard, *Giant vortex and the breakdown of strong pinning in a rotating Bose-Einstein condensate*, Arch. Rational Mech. Anal., to appear.

[3] A. Aftalion, Q. Du, *Vortices in a rotating Bose-Einstein condensate: critical angular velocities and energy diagrams in the Thomas-Fermi regime*, Phys. Rev. A **64** (2001).

[4] F. Almgren, W. Browder, E.H. Lieb, *Co-area, liquid crystals and minimal surfaces*, Partial differential equations (Tianjin 1986), 1–22. Lecture Notes in Math. **1306**, Springer, Berlin 1988.

[5] S.N. Antontsev ,J.I. Díaz, S. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems, Applications to nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **48**, Birkhäuser, Boston MA, 2002.

[6] F. Bethuel, *A characterization of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire **7** (1990), 269–286.

[7] F. Bethuel, H. Brezis, J.M. Coron, *Relaxed energies for harmonic maps*, Variational methods (Paris, 1988), 37–52. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **4**, Birkhäuser, Boston MA, 1990.

[8] F. Bethuel, H. Brezis, F. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, Basel, 1993.

[9] E. Bonnetier, A. Chambolle, *Computing the equilibrium configuration of epitaxially strained crystalline films*, SIAM J. Appl. Math. **62** (2002), 1093–1121.

[10] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu, *$H^{1/2}$–maps with values into the circle: Minimal connections, lifting and the Ginzburg-Landau equation*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **99** (2004), 1–115.

[11] H. Brezis, J.M. Coron, E.H. Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649–705.

[12] W.F. Brown, *Micromagnetics*, Wiley, New York, 1963.

[13] D. Butts, D. Rokhsar, *Predicted signatures of rotating Bose-Einstein condensates*, Nature **397** (1999).

[14] Y. Castin, R. Dum, *Bose-Einstein condensates with vortices in rotating traps*, European Phys. J. D **7** (1999), 399–412.

[15] A. Chambolle, C. Larsen, *C^∞ regularity of the free boundary for a two-dimensional optimal compliance problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), 77-94.

[16] B. Dacorogna, I. Fonseca, K. Trivisa, *Manifold constrained variational problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations **9** (1999), 185–206.

[17] I. Fonseca, N. Fusco, G. Leoni, M. Morini, *Equilibrium configurations of epitaxially strained crystalling films: existence and regularity results*, preprint.

[18] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *Cartesian Currents in the Calculus of Variations*, Modern Surveys in Mathematics **37-38**, Springer-Verlag, Berlin 1998.

[19] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *On sequences of maps into S^1 with equibounded $W^{1/2}$–energies*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), 359–375.

[20] R. Hardt, D. Kinderlehrer, F. H. Lin, *Existence and partial regularity of static liquid crystal configurations*, Comm. Math. Phys. **105** (1986), 547–570.

[21] K. Madison, F. Chevy, J. Dalibard, W. Wohlleben, *Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000).

[22] K. Madison, F. Chevy, J. Dalibard, W. Wohlleben, *Vortices in a stirred Bose-Einstein condensate*, J. Mod. Opt. **47** (2000), 1–10.

[23] J.M. Morel, S. Solemini, *Variational methods in image segmentation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **14**, Birkhäuser, Basel, 1995.

[24] T. Rivière, *Dense subsets of $H^{1/2}(S^2, S^1)$*, Ann. Global Anal. Geom. **18** (2000), 517–528.

[25] E. Sandier, S. Serfaty, *Global minimizers for the Ginzburg-Landau functional below the first critical magnetic field*, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire **17** (2000), 119–145.

[26] E. Sandier, S. Serfaty, *Ginzburg-Landau minimizers near the first critical field have bounded vorticity*, Calc. of Var. and Partial Differential Equations **17** (2003), 17–28.

[27] K. Schnee, J. Yngvason, *Bosons in disc-shape traps: from 3D to 2D*, preprint.

[28] S. Serfaty, *Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy near critical magnetic field: Part I*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), 213–254.

[29] S. Serfaty, *Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy near critical magnetic field: Part II*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), 295–333.

[30] S. Serfaty, *On a model of rotating superfluids*, ESAIM: Control Optim. Calculus Variations **6** (2001) 201-238.