Równania stopnia 3 i 4

Tomasz Tkocz

Streszczenie. Notatki te, przygotowane do referatu wygłoszonego na kółku w II LO w Rybniku, pokazują jak można rozwiązywać równania stopni trzy i cztery. Autor oparł je w całości na odpowiednim rozdziale z książki [**Kor**].

0. Na rozgrzewkę przypomnijmy sobie coś prostego — jak rozwiązywać równania stopnia drugiego. Po prostu uzupełniamy do pełnego kwadratu

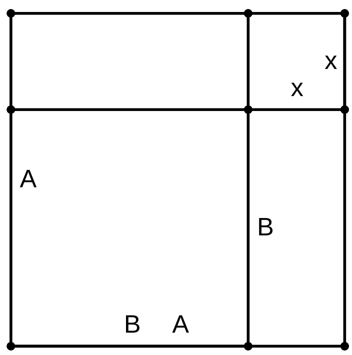
$$0 = x^2 + bx - c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - c - \frac{b^2}{4}$$

i widać, że rozwiązaniem jest

$$x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2},$$

zakładając, że $b^2 + 4c \geqslant 0$.

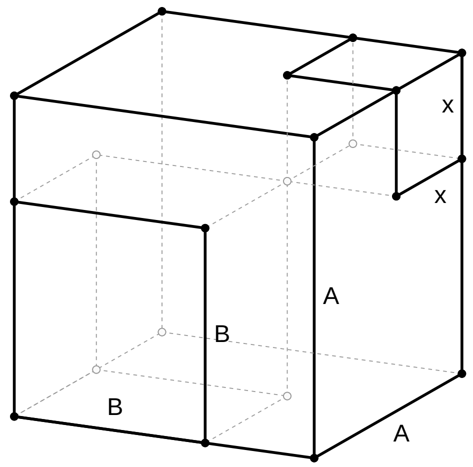
1. Na powyższy problem można jednak patrzeć geometrycznie; wszakże tak robili już arabowie. Mianowicie, gdy chcieli rozwiązać równanie $x^2 + bx = c$ (współczynniki są dodatnie, oni nie znali liczb ujemnych), brali kwadrat o boku A i dzielili go jak na rysunku 1, otrzymując równanie $A^2 = x^2 + B^2 + 2Bx$, które łatwo rozwiązać, bo $x = A - B$. Porównując odpowiednie współczynniki mamy $b = 2B, c = A^2 - B^2$, czyli wyjściowe równanie ma dodatnie



Rysunek 1. Arabski sposób na równanie kwadratowe

rozwiązanie dane wzorem

$$x = A - B = \sqrt{c + B^2} - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}.$$



Rysunek 2. Podział sześcianu

2. Spróbujmy po arabsku rozwiązać teraz równanie stopnia 3

$$x^3 + ax = b.$$

Z rysunku 2 mamy $x^3 + 3ABx + B^3 = A^3$, tzn. $x^3 + 3ABx = A^3 - B^3$, więc $a = 3AB$, $b = A^3 - B^3$. Oznaczmy $p := A^3$, $q := B^3$. Wówczas

$$\begin{cases} \frac{a^3}{27} & = & pq \\ b & = & p - q \end{cases},$$

co łatwo rozwiązać

$$q = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}, p = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}},$$

skąd

$$x = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}.$$

Pojawia się jednak kłopot — gdy $\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} < 0$ nasze napisy mają mało sensu, zaś równanie i tak ma pierwiastek rzeczywisty (bo jest stopnia nieparzystego). Właśnie zastanawiając się nad tym kłopotem odkryto liczby zespolone. My jednak dzisiaj pominiemy tę delikatną kwestię.

3. Co z równaniem stopnia czwartego? Tutaj podobną sztuczkę geometryczną trudno sobie wyobrazić. Pozostają sztuczki algebraiczne. Niech

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0, b \neq 0,$$

(zakładamy, że współczynnik przy x^3 jest zerowy, bo w przeciwnym przypadku dokonujemy podstawienia $x - \frac{a}{4}$ — analogicznie jak w milczeniu pomijaliśmy wyraz kwadratowy w równaniu stopnia trzy). Wprowadzamy nową zmienną y przepisując równanie do postaci

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right)^2 = 2yx^2 - bx + \left(y^2 + ay - c + \frac{a^2}{4}\right).$$

y dobieramy takie, aby prawa strona względem x stała się pełnym kwadratem (zachodzi to dla $y = y_0$ takiego, że $b^2 - 4y_0\left(y_0^2 + ay_0 - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0$, co stanowi równanie stopnia trzy, które już potraimy rozwiązać). Wówczas mamy

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right)^2 = 2y_0\left(x - \frac{b}{4y_0}\right)^2,$$

i widzimy tutaj równanie kwadratowe, czyli jesteśmy w domu.

Literatura

[Kor] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Script, Warszawa 2006