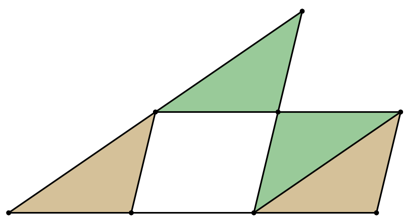
O objętościach brył

Tomasz Tkocz

Streszczenie. Notatki te, przygotowane do referatu wygłoszonego na kółku w II LO w Rybniku, pokazują jak już starożytni wyprowadzili wzory na objętość czworościanu, kuli i na pole powierzchni kuli. Autor oparł je w całości na odpowiednich rozdziałach z książki [**Kor06**].

0. Czy $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta nas dziwi? Oczywiście, nie — wystarczy dobrze pociąć trójkąt (por. rysunek).

Czy potrafimy podobnie zrobić z czworościanem, tzn. pociąć go tak, żeby zbudować z niego graniastosłup i przekonać się tym samym o prawdziwości $\frac{1}{3}$ we wzorze na jego objętość? Okazuje się, że nie zawsze (problem Hilberta rozwiązany przez Dehna, por. [**Kor08, AiZi**])! Mimo to, już Euklides w *Elementach* (IV w. p.n.e.) dowodzi wzoru



Rysunek 1. Jak z trójkąta zrobić równoległobok

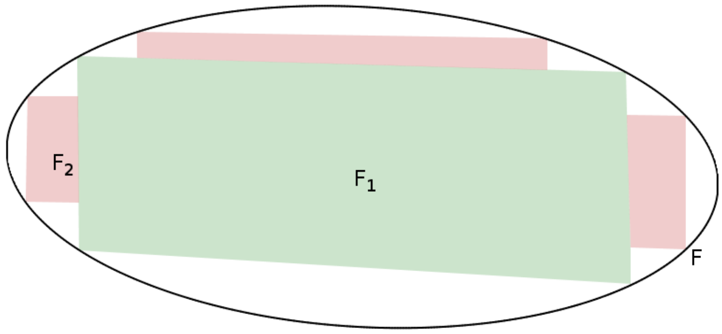
$$V_{\text{czworościan}} = \frac{1}{3} \cdot \texttt{pole podstawy} \cdot \texttt{wysokość}.$$

Spróbujemy dzisiaj prześledzić jego tok rozumowania.

1. Podobnie, intrygujące wydają się $\frac{4}{3}$ i 4 we wzorach z kulą. Tutaj pujdziemy za pracą Archimedesa (III w. p.n.e.) *O kuli i walcu*, aby zobaczyć skąd się biorą te nieoczywiste współczynniki liczbowe.

Euklides korzysta z *metody wyczerpywania* Eudoksosa, inaczej zwaną też *całką Eudoksosa* lub *całkowaniem starożytnych*.

Chodzi o to, że chcemy zmierzyć figurę (albo bryłę) $\mathscr{F}$. W tym celu wyjmujemy z niej jej część $\mathscr{F}_1$, której miarę znamy (np. graniastosłup) przy czym musi być ona większa od połowy miary całej figury (co



Rysunek 2. Wyczerpywanie

trzeba udowodnić i to może nie być łatwe, wszak nie znamy $|\mathscr{F}|$). Z pozostałą częścią $\mathscr{F}\setminus\mathscr{F}_1$ odgrzewamy dowcip — wyjmujemy $\mathscr{F}_2$, przy czym $|\mathscr{F}_2| > \frac{1}{2}|\mathscr{F}\setminus\mathscr{F}_1|$, itd. dostając figury $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$. Zauważmy, że

$$|\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2| + \ldots + |\mathscr{F}_n| + \ldots = |\mathscr{F}|.$$

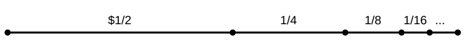
Istotnie, wiemy, że

$$|\mathscr{F}| \geqslant |\mathscr{F}_1| + \cdots + |\mathscr{F}_n|,$$

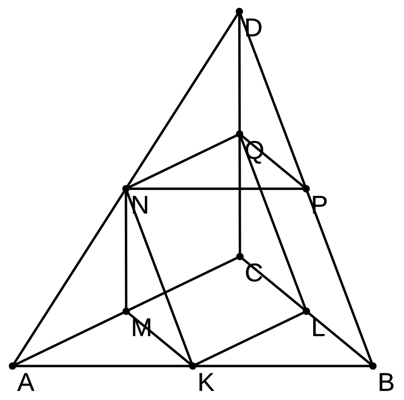
bo kolejne figury $\mathscr{F}_k$ są wyjmowane z $\mathscr{F}$ i są rozłączne. Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F}_1| &> \frac{1}{2}|\mathscr{F}|, \\
|\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2| &> |\mathscr{F}_1| + \frac{1}{2}|\mathscr{F}\setminus\mathscr{F}_1| = \frac{1}{2}|\mathscr{F}| + \frac{1}{2}|\mathscr{F}_1| > \frac{1}{2}|\mathscr{F}| + \frac{1}{2^2}|\mathscr{F}|, \\
|\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2| + |\mathscr{F}_3| &> |\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2| + \frac{1}{2}|\mathscr{F}\setminus(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2)| \\
&= \frac{1}{2}|\mathscr{F}| + \frac{1}{2}(|\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2|) = \frac{1}{2}|\mathscr{F}| + \frac{1}{2^2}|\mathscr{F}| + \frac{1}{2^3}|\mathscr{F}|, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|\mathscr{F}_1| + \ldots + |\mathscr{F}_n| &> \frac{1}{2}|\mathscr{F}| + \ldots + \frac{1}{2^n}|\mathscr{F}| = \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)|\mathscr{F}|.
\end{aligned}$$

Wypisując liczby $1, 2, \ldots$ po kolei, ale każdą następną dwa razy szybciej wypiszemy je wszystkie w skończonym czasie!



Ale przecież $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$, bo $1 - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$ (por. rysunek), więc liczba $\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ różni się dowolnie mało od 1, więc te liczby muszą być równe!



2. Zobaczmy teraz jak Euklides wyczerpuje czworościan $\mathscr{F} = ABCD$, aby obliczyć jego miarę (objętość). Wyjmujemy $\mathscr{F}_1 :=$ graniastosłupy $KNMLQC, KBLNPQ$. Wyjęliśmy więcej jak połowa, bo pozostałe czworościany $AKMN$, $NPQD$ można zmieścić odpowiednio w tych graniastosłupach (wystarczy przesunąć równolegle by to zobaczyć). Z każdym z czworościanów $AKMN$, $NPQD$ odgrzewamy dowcip — wyjmujemy z nich odpowiednie graniastosłupy dostając $\mathscr{F}_2$, itd. Zatem

$$|\mathscr{F}| = |\mathscr{F}_1| + |\mathscr{F}_2| + \ldots + |\mathscr{F}_n| + \ldots.$$

Ale $|\mathscr{F}_2| = 2 \cdot \frac{1}{8}|\mathscr{F}_1| = \frac{1}{4}|\mathscr{F}_1|$, bo każdy z czworościanów $AKMN$, $NPQD$ to czworościan $ABCD$ w skali $1 : 2$, czyli wyjmowane za drugim razem graniastosłupy mają objętość $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ objętości graniastosłupów wyjmowanych za pierwszym razem. Zupełnie analogicznie mamy

$$|\mathscr{F}_3| = \frac{1}{4}|\mathscr{F}_2| = \frac{1}{4^2}|\mathscr{F}_1|,$$

itd. więc

$$|\mathscr{F}| = |\mathscr{F}_1|\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{4}{3}|\mathscr{F}_1|.$$

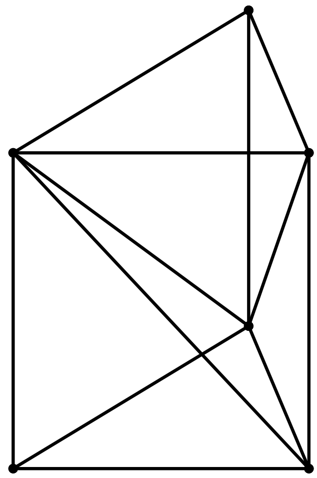
Ale

$$|\mathscr{F}_1| = |KNMLQC| + |KBLNPQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|ABC| \cdot \frac{1}{2}\texttt{wysokość}$$
$$+\frac{1}{4}|ABC| \cdot \frac{1}{2}\texttt{wysokość} = \frac{1}{4}|ABC| \cdot \texttt{wysokość},$$

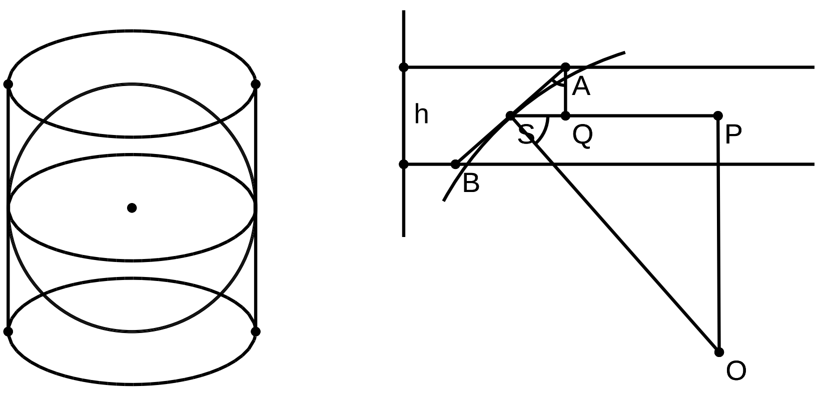
bo $KNMLQC$ to połowa graniastosłupa o podstawie $KLCM$ (który jest równoległobokiem o polu będącym połową pola trójkąta ABC) i wysokości stanowiącej połowę wysokości czworościanu $ABCD$ opuszczonej z wierzchołka D, zaś graniastosłup $KBLNPQ$ ma podstawę KLB — ćwiartka trójkąta ABC. Ostatecznie

$$|\mathscr{F}| = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}|ABC| \cdot \texttt{wysokość} = \frac{1}{3} \cdot \texttt{pole podstawy} \cdot \texttt{wysokość}.$$

2. Właściwie istotą powyższego dowodu nie jest współczynnik $\frac{1}{3}$, który łatwo widzieć z rysunku , ale postać wzoru na objętość — że jest ona proporcjonalna do iloczynu pola podstawy i wysokości.



Rysunek 3. Skąd $\frac{1}{3}$?

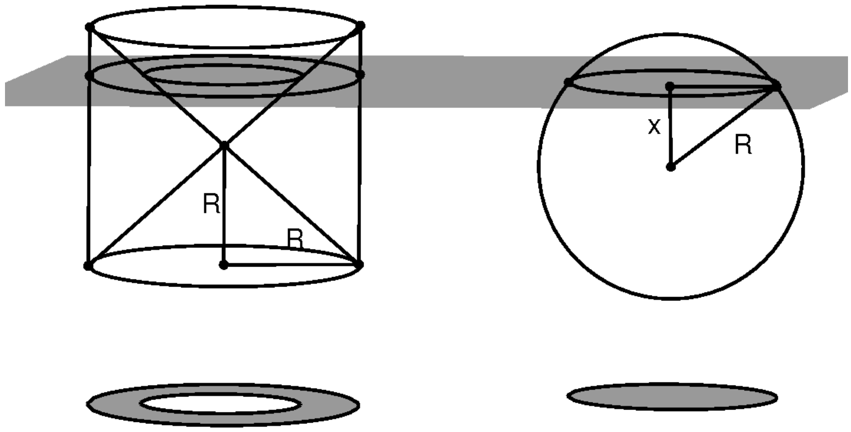


Rysunek 4. Aproksymacja powierzchni kuli stożkami ściętymi

3. Spróbujmy zmierzyć się z kulą i zacznijmy od wzoru na jej pole powierzchni. Archimedes wpisuje ją w walec o wysokości $2R$ i promieniu podstawy R. Prowadzimy dwie płaszczyzny równoległe do podstawy walca odległe o h i w połowie odległości między nimi prowadzimy płaszczyznę styczną do kuli — powstaje powierzchnia boczna stożka ściętego. Jej pole powierzchni wynosi $\pi \cdot SP \cdot AB$, ale $\frac{SA}{AQ} = \frac{SO}{SP}$, skąd ($SA =$

$\frac{1}{2}AB)$ $SP\cdot AB = 2SO\cdot AQ = 2R\cdot \frac{h}{2} = Rh$, więc to pole wynosi $2\pi Rh =$ pole powierzchni bocznej walca wyciętej przez te płaszczyzny. Kulę można przybliżać dowolnie dokładnie powierzchniami bocznymi coraz mniejszych stożków ściętych, więc

$$\begin{aligned}\text{pole powierzchni kuli} &= \text{pole powierzchni bocznej walca}\\ &= 2\pi R\cdot 2R = 4\pi R^2.\end{aligned}$$



Rysunek 5. Objętość kuli

Jeśli chodzi o objętość, to Archimedes rozumuje jak następuje. Wpiszmy jeszcze w walec stożki jak na rysunku **??** i znowu rozważmy przekrój płaszczyzną równoległą do podstaw walca, odległą o x od środka walca. Tym razem jednak patrzymy na pole powierzchni odpowiednich przekrojów. Widzimy, że są jednakowe dla dowolnego x, stąd objętości są równe (jak będziemy nalewać wody do obu naczyć równocześnie z tą samą prędkością, to będzie się ona w obu naczyniach podnosić tak samo szybko, więc nalejemy jej tyle samo). Zatem

$$V_{\text{kula}} = V_{\text{walec}} - 2V_{\text{stożek}} = \pi R^2\cdot 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2\cdot = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Literatura

[AiZi] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z księgi*, PWN, Warszawa 2004
[Kor06] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Script, Warszawa 2006
[Kor08] M. Kordos, *Pole i objętość*, Delta **441** (8/2008), 4–8