Wrześniowe kółko we Fryczu nr 2 — Nierówności via Lemaciki

7.09.2010r.

Przykład 1. Udowodnimy nierówność trójkąta $|x|+|y| \geqslant |x+y|$ za pomocą lemaciku

$$|x| \geqslant x, \qquad \text{dla dowolej liczby rzeczywistej } x.$$

Możemy zakładać bez utraty ogólności, że $x+y \neq 0$. Wtedy

$$\frac{|x|+|y|}{|x+y|} = \left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

$\square$

Kilka zadań

1 (57OMIIst)**.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c spełniających $ab+bc+ca=abc$ zachodzi

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant 1.$$

2 (56OMIIst)**.** Dla $a, b, c \in [0,1]$ udowodnić, że $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2$.

3 (58OMIIst)**.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d spełniających $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$ zachodzi

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leqslant 2(a+b+c+d) - 4.$$

4 (Zwardoń 2004)**.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi $a^a + b^b > ab$.

5 (Zwardoń 2004)**.** Udowodnić, że dla liczby dodatniej a zachodzi $a^{a^2} + a^{2a} > 1$.

Wrześniowe kółko we Fryczu nr 2 — Nierówności via Lemaciki

7.09.2010r.

Przykład 2. Udowodnimy nierówność trójkąta $|x|+|y| \geqslant |x+y|$ za pomocą lemaciku

$$|x| \geqslant x, \qquad \text{dla dowolej liczby rzeczywistej } x.$$

Możemy zakładać bez utraty ogólności, że $x+y \neq 0$. Wtedy

$$\frac{|x|+|y|}{|x+y|} = \left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

$\square$

Kilka zadań

1 (57OMIIst)**.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c spełniających $ab+bc+ca=abc$ zachodzi

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geqslant 1.$$

2 (56OMIIst)**.** Dla $a, b, c \in [0,1]$ udowodnić, że $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2$.

3 (58OMIIst)**.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d spełniających $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$ zachodzi

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leqslant 2(a+b+c+d) - 4.$$

4 (Zwardoń 2004)**.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi $a^a + b^b > ab$.

5 (Zwardoń 2004)**.** Udowodnić, że dla liczby dodatniej a zachodzi $a^{a^2} + a^{2a} > 1$.