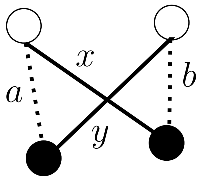
Kółeczko z zadankami 9.II.2010 — Rozwiązania

1. Por. zadanie 6 V OMG I stopień (rozwiązanie znajduje się w *Delta*, **2** (429) 2010, str. 18).

2. Jeśli $n = ab$, przy czym ab są względnie pierwsze, to z jednoznaczności rozkładu liczb całkowitych na liczby pierwsze wynika, że $a = \Pi p_i^{\beta_i}, b = \Pi p_i^{\alpha_i - \beta_i}$, przy czym $\beta_i \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$. Zatem uporządkowanych par czynników a, b jest $\Pi(\alpha_i + 1)$. Jeśli któreś α_i jest nieparzyste, to zawsze będzie $a \neq b$, więc nieuporządkowanych par w tym przypadku jest $\frac{1}{2}\Pi(\alpha_i + 1)$. W przeciwnym przypadku, $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_i = \frac{1}{2}\alpha_i$, dla każdego i. Taka sytuacja ma miejsce tylko raz, zatem w tym przypadku nieuporządkowanych par czynników a, b będzie dokładnie $\frac{1}{2}\left(\Pi(\alpha_i + 1) - 1\right) + 1$

3. Por. zadanie 1 V OMG II stopień.

4. Por. zadanie 2 V OMG II stopień.



5. n odcinków, tak aby ich końce były różnokolorowe, możemy narysować tylko na skończenie wiele sposobów (dokładnie na $n!$). Wybierzmy spośród nich taki, aby suma długości narysowanych odcinków była najmniejsza. Wtedy te odcinki są parami rozłączne, bo w przeciwnym przypadku (por. rys.) parę odcinków przecinających się x, y można zastąpić parą odcinków nieprzecinających się a, b nie zwiększając jednocześnie sumy długości wszystkich odcinków (z nierówności trójkąta łatwo $|a| + |b| \leqslant (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) = |x| + |y|$)