Wrześniowe kółko we Fryczu nr 2 — Dirichlet i $\leqslant \Delta$ (nierówność trójkąta)

8.IX.2009r.

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa Dirichleta)**.** *Danych jest n brylantów powkładanych jakoś do k szufladek. Jeśli $n > k$, to w pewnej szufladce znajdą się co najmniej dwa brylanty.*

Równoważnie, jeśli n elementowy zbiór X podzielimy na k rozłącznych podzbiorów i $n > k$, to któryś z tych podzbiorów zawiera co najmniej dwa elementy.

Równoważnie, nie istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru n elementowego w zbiór k elementowy, jeśli $n > k$.

Twierdzenie 2 ($\leqslant \Delta$)**.** *Dane są różne punkty A, B, C na płaszczyźnie. Wówczas*

$$AB \leqslant AC + CB,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy C należy do odcinka AB.

Wniosek 1. *Dla łamanej $A_1A_2 \ldots A_n$ zachodzi nierówność $A_1A_n \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$.*

Kilka zadań

1. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E, F, G, H są odpowiednio środkami tych łuków AB, BC, CD, DA, które nie zawierą pozostałych wierzchołków czworokąta. Udowodnić, że $EG \perp FH$.

2. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC, którego obwód wynosi $2p$. Udowodnić, że $p < AX + BX + CX < 2p$.

3. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + (2i-1)^2}$ dla $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$.

4. Dany jest zbiór skończony X i funkcja $f\colon X \longrightarrow X$. Udowodnić, że istnieje liczba n oraz element $x \in X$ takie, że

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(x)\ldots)) = x.$$

5. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych (tzn. punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnić, że środek jednego z odcinków łączących te punkty jest również punktem kratowym.

6. Dany jest pięciokąt wypukły o wierzchołkach w punktach kratowych. Wykazać, że istnieje punkt kratowy leżący wewnątrz tego pięciokąta.

7. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n obliczyć ile jest różnych par (x, y) rozwiązań równania $xy = 2009^n$ w: a) liczbach całkowitych b) liczbach całkowitych dodatnich.