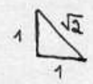
Aproksymacja

1. Już na samym początku nauki w liceum dowodzi się (potężną bronią reductio ad absurdum) rzeczy niebanalnej: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ten fakt Pitagorejczyków przeraził (nas też powinien), ale na szczęście - mimo przerażenia i strachu - pchnęło to myśl o liczbach do przodu. Jednak co to jest tak na prawdę $\sqrt{2}$?



2. „Co" w tym przypadku może znaczyć „ile". Ludzie często uspokajają się jak się napisze $\sqrt{2} \approx 1{,}41 = \frac{141}{100}$, albo $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, Oczywiste jest, że $\sqrt{2}$ ułamkiem dziesiętnym można przybliżać dowolnie dokładnie. Innymi słowy, do tej liczby niewymiernej $\alpha = \sqrt{2}$ można podejść dowolnie blisko ułamkiem dziesiętnym $\frac{p}{q}$; dziesiętnym, czyli q jest tutaj postaci 10^n. Popatrzmy na rzecz następującą:

- żeby $\sqrt{2}$ przybliżyć z dokładnością $\frac{1}{100}$ (do 2 miejsc po przecinku) można użyć ułamka $\frac{141}{100}$.
- Grecy żeby π (też liczba niewymierna!) przybliżyć z dokładnością $\frac{1}{100}$ używali ułamka $\frac{22}{7}$.

Ułamek $\frac{22}{7}$ wydaje się lepszy, bo ma dużo mniejszy mianownik od tego z $\frac{141}{100}$ a daje tą samą dokładność. Stajemy więc przed pytaniem

Mając daną liczbę niewymierną α chcemy ją przybliżyć liczbą wymierną $\frac{p}{q}$; na ile dokładnie może się to udać zrobić?

Z rozwijania liczby $\sqrt{2}$ na ułamek dziesiętny wiemy już, że

Tw. Dla $\alpha \notin \mathbb{Q}$ istnieją ułamki $\frac{p}{q}$ t. że $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$, dla q dowolnie dużych.

D-D. Biorąc rozwinięcie dziesiętne α n cyfrowe po przecinku mamy

$$\alpha \approx c_0, c_1 c_2 \dots c_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_n}{10^n}.$$

Przyjmując $\frac{p}{q}$ = to coś sprowadzone do wspólnego mianownika $= \frac{c_0 c_1 c_2 \dots c_n}{10^n}$

mamy

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = 0,\underbrace{00\dots0}_{n}\text{coś} < 0,\underbrace{00\dots0}_{n-1}1 = \frac{1}{q}. \quad \blacksquare$$

3. Powyższe tw. nie jest imponujące, bo greckie $\frac{22}{7}$ dają dokładność $\frac{1}{100} < \frac{1}{7^2}$.

Czy można zatem udowodnić, że

(*) Dla $\alpha \notin \mathbb{Q}$ istnieją ułamki $\frac{p}{q}$ takie, że $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, dla q dowolnie dużych.

Tak! Zrobimy to na dwa sposoby: efektywnie i nieefektywnie.

4. Efektywnie – u.T. (ułamki Łańcuchowe)

u.T. sk. to formalnie napis $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$, $1 \le a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$

Np. $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$, $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{5/3} = 1 + \cfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3/2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

$\frac{7}{12} = \frac{1}{12/7} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7/5}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5/2}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$.

Rozwijanie liczby wymiernej na uł. sk. to nic innego jak wykonywanie algorytmu Euklidesa, dlatego zawsze to można robić. A co z liczbami niewymiernymi?

Np.

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

Też można rozwijać, ale nie można przestać tego robić jak się już zacznie.

Ogólnie postępujemy tak

$$\alpha = \underbrace{\lfloor \alpha \rfloor}_{a_0} + \{\alpha\} = a_0 + \frac{1}{\underbrace{1/\{\alpha\}}_{x_1}} = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{\underbrace{\lfloor x_1 \rfloor}_{a_1} + \cfrac{1}{\underbrace{1/\{x_1\}}_{x_2}}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = \dots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

$x_0 = \alpha$ $\qquad a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$

$x_1 = \frac{1}{\{x_0\}}$ $\qquad a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$

$x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}$ $\qquad a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$

$\vdots$

$x_k = \frac{1}{\{x_{k-1}\}}$ $\qquad a_k = \lfloor x_k \rfloor$.

W ten sposób liczbę niewymierną też można przedstawić jako ułamek łańcuchowy tyle, że nieskończony. Jednak jeśli wziąć początkowy fragment tego nieskończonego ułamka, to mamy liczbę wymierną

$$R_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

nazywaną k-tym reduktem u.T., która powinna dobrze przybliżać α.

Naszym celem jest więc teraz zbadanie jak mała jest liczba $|\alpha - R_k|$.

Przede wszystkim zauważmy, że każdy u.ł. sk. można zwinąć i zapisać jako zwykły ułamek, np. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3/2}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$. Zróbmy też tak z k-tym reduktem. Niech $R_k = \frac{P_k}{Q_k}$. Obliczamy, że

$$R_0 = a_0 = \frac{a_0}{1}, \quad P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1$$

$$R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}, \quad P_1 = a_1 a_0 + 1, \quad Q_1 = a_1$$

$$R_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0(a_2 a_1 + 1) + a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}, \quad P_2 = a_2 P_1 + P_0, \quad Q_2 = a_2 Q_1 + Q_0.$$

Indukcją dalej dowodzimy, że $P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2}$, $Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$.
Istotnie, jeśli w R_k a_k zamienimy przez $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ to otrzymamy R_{k+1}.
Widać, że $P_{k-1}, P_{k-2}, Q_{k-1}, Q_{k-2}$ nie zależą od a_k więc ta zamiana na te liczby nie wpływa, stąd

$$R_{k+1} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})P_{k-1} + P_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{a_{k+1}(a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} P_k + P_{k-1}}{a_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}.$$

Udowodnione wzory pozwalają uzyskać, przez wyeliminowanie z nich a_k, następujący związek

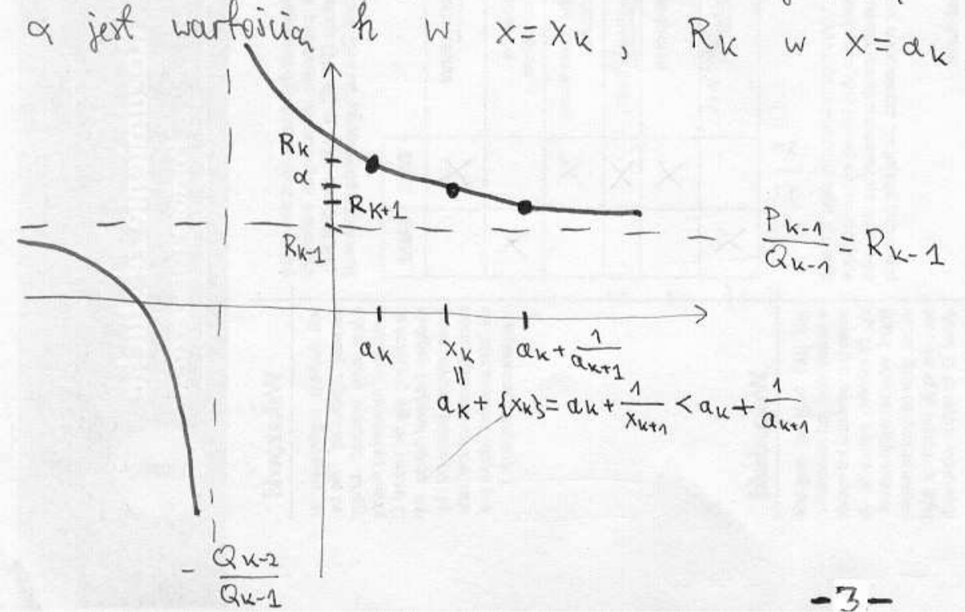
$$(!) \quad P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = P_{k-2} Q_{k-1} - Q_{k-2} P_{k-1} = -(P_{k-1} Q_{k-2} - Q_{k-1} P_{k-2})$$
$$= \ldots = (-1)^{k-1}(P_1 Q_0 - Q_1 P_0) = (-1)^{k-1}$$

(!) Stąd wynika, że P_k, Q_k są względnie pierwsze!

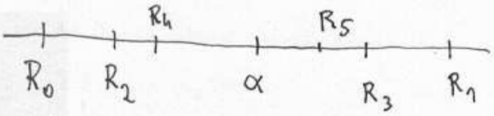
Możemy wreszcie przejść do sedna. Mamy

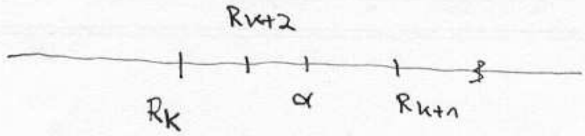
$$\alpha = \frac{x_k P_{k-1} + P_{k-2}}{x_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}, \quad R_k = \frac{a_k P_{k-1} + P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Jeśli więc rozważymy funkcję homograficzną $h(x) = \frac{x P_{k-1} + P_{k-2}}{x Q_{k-1} + Q_{k-2}}$, to α jest wartością h w $x = x_k$, R_k w $x = a_k$.



Widać z rysunku gdzie znajdują się kolejne redukty α. Otóż redukty tej samej parzystości są po ustalonej stronie α i te z większym numerkiem leżą coraz bliżej α





Mamy zatem

$$|\alpha - R_k| < |R_{k+1} - R_k| = \left| \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} \right| = \frac{|P_{k+1}Q_k - P_k Q_{k+1}|}{Q_{k+1}Q_k} = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k^2}$$

czyli $\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2}$, co dowodzi

TW Dla $\alpha \notin \mathbb{Q}$ istnieją ułamki $\frac{p}{q}$ t.że $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, dla q dowolnie dużych.

Można też z rysunku odczytać na ile to oszacowanie jest złe

$$|\alpha - R_k| > |R_{k+2} - R_k| = |R_{k+2} - R_{k+1} + R_{k+1} - R_k| = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{Q_{k+1}Q_{k+2}} + \frac{(-1)^k}{Q_{k+1}Q_k} \right|$$

$$= \cancel{\frac{Q_{k+2}-Q_k}{Q_{k+1}Q_kQ_{k+2}}} \frac{1}{Q_{k+1}}\left(\frac{1}{Q_k} - \frac{1}{Q_{k+2}}\right) > \frac{1}{Q_{k+1}}\left(\frac{1}{Q_k} - \frac{1}{Q_{k+1}+Q_k}\right)$$

$$= \frac{1}{Q_k(Q_{k+1}+Q_k)} > \frac{1}{2Q_kQ_{k+1}}.$$

Trzeba tu też wspomnieć o prawie najlepszego przybliżenia, które stanowi o donio
u.ł.

TW (PNP) Niech $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z}, 0 < b \in \mathbb{Z})$ lepiej przybliża $\alpha \notin \mathbb{Q}$ jak R_n, tzn. $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < |\alpha - R_n|$.

Wówczas $b > Q_n$.

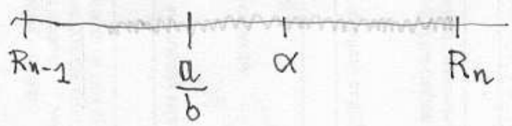
D-D. Potrzebny będzie

FAKT. Każdy kolejny redukt lepiej przybliża α, tzn. $|\alpha - R_n| < |\alpha - R_{n-1}|$.

Istotnie $|\alpha - R_n| < |R_{n+1} - R_n| = \frac{1}{Q_nQ_{n+1}} < \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})} < \frac{1}{Q_{n-1}(Q_n+Q_{n-1})}$,

$$|\alpha - R_{n-1}| > |R_{n+1} - R_{n-1}| > \frac{1}{Q_{n-1}(Q_n+Q_{n-1})}.$$

Mamy więc sytuację



czyli $\frac{a}{b}$ leży między R

skąd

$$\frac{1}{bQ_{n-1}} < \frac{|aQ_{n-1} - bP_{n-1}|}{|bQ_{n-1}|} = \left|\frac{a}{b} - R_{n-1}\right| < |R_n - R_{n-1}| = \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}$$

zatem $b > Q_n$.

5. Nieefektywnie - dowód Dirichleta.

Szukamy $\frac{p}{q}$ t.że $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. (B.u.o możemy założyć, że $\alpha \in (0,1)$, bo $\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \{\alpha\}$). Rozbijamy przedział $[0,1]$ na N równych części (szufladek) i rozważamy $N+1$ liczb (przedmiotów)

$0,\ \alpha-\lfloor\alpha\rfloor,\ 2\alpha-\lfloor 2\alpha\rfloor,\ \ldots,\ N\alpha-\lfloor N\alpha\rfloor.$

Są to liczby z przedziału $(0,1)$ parami różne (dlaczego?). Skoro jest ich $N+1$ to ~~sąo~~ znajdą się 2 pośrednimy $k\alpha-\lfloor k\alpha\rfloor$, $l\alpha-\lfloor l\alpha\rfloor$, $0\le k<l\le N$ które lądują w tej samej szufladzie. Stąd ich odległość jest $<\frac{1}{N}$, czyli

$$|k\alpha-\lfloor k\alpha\rfloor-(l\alpha-\lfloor l\alpha\rfloor)|<\frac{1}{N}$$

co daje $(*)$ $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Nq}<\frac{1}{q^2}$, gdzie $p=\lfloor k\alpha\rfloor-\lfloor l\alpha\rfloor$, $q=k-l$.

Pozostaje pokazać, że q może być dowolnie wielkie. Gdyby tak nie było to mielibyśmy $q<Q$. Wtedy $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Nq}<1$, skąd $p<q(\alpha+1)<Q(\alpha+1)$, zatem p i q są ograniczone. Jest więc skończenie wiele ułamków spełniających (
Niech to będą $\frac{p_1}{q_1},\ldots,\frac{p_m}{q_m}$. Oznaczmy $\varepsilon=\min_{i=1,\ldots,m}\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|$. Biorąc N tak duże aby ~~ε~~ $\frac{1}{N}<\varepsilon$ otrzymujemy $\frac{1}{Nq_i}<\frac{1}{N}<\frac{1}{\varepsilon}\le\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|$ i sprzeczność bo dobraliśmy N takie, że $(*)$ nie zachodzi dla żadnego ułamka $\frac{p_i}{q_i}$.

6. Aproksymacja może zaprowadzić do naprawdę silnych rezultatów. Liouville w poł. XIX w. udowodnił

TW Jeśli α jest liczbą algebraiczną stopnia d, to istnieje stała $C>0$, że $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{C}{q^d}$ dla wszystkich ułamków $\frac{p}{q}$ ($p\in\mathbb{Z}$, $0<q\in\mathbb{Z}$).

(Obrazowo: liczby algebraiczne źle się przybliżają liczbami wymiernymi).

D-D. Niech P będzie wiel. st. d o wsp. całk. którego pierwiastkiem jest α.
Mamy $|P'|\le M$ w $[\alpha-1,\alpha+1]$, gdzie możemy wziąć $M>1$.

Jeśli $\frac{p}{q}\in[\alpha-1,\alpha+1]$, to $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{P(\alpha)-P(\frac{p}{q})}{P'(\xi)}\right|\ge\frac{1/M}{q^d}$ |coś całk $\neq 0$
$\ge\frac{1/M}{q^d}.$

Jeśli $\frac{p}{q}\notin[\alpha-1,\alpha+1]$, to $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\ge 1\ge\frac{1}{M}\ge\frac{1/M}{q^d}.$

Wystarczy więc wziąć $C=\frac{1}{M}$.

WN Liczba Liouville'a $L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}=0,\underset{1!}{1}\underset{2!}{1}000\underset{3!}{1}00\ldots0\underset{4!}{1}00\ldots0\underset{5!}{1}0\ldots$

jest przestępna.

Tw. Liouville'a sugeruje, że stopień złej aproksymacji α zależy od d. Ale tak nie jest, bo Roth w poł XX w udowodnił

TW Jeśli α jest liczbą algebraiczną st. d, to dla $\varepsilon>0$ ist. $C>0$, że $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$, dla wszelkich
Problemem otwartym jest czy można znaleźć stałą C, że $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{C}{q^2\ln q}$.