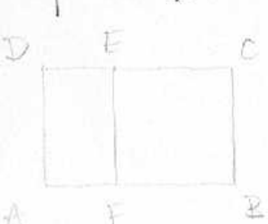
Konstrukcje pięciokąta foremnego 22.09.2008

1. Klasyczna konstrukcja geometryczna dopuszcza użycia tylko cyrkla i linijki (wobec swoich postulatów takie ograniczenie dał Euklides). Jakie n-kąty foremne potrafimy skonstruować? Euklides w księdze IV Elementów podaje konstrukcje: trójkąta równobocznego, kwadratu, pięciokąta i piętnastokąta. Gauss dołożył do tej listy siedemnastokąt foremny [2,3] i wypowiedział twierdzenie dające pełną odpowiedź na nasze pytanie

Tw. n-kąt foremny daje się skonstruować wtedy i tylko wtedy, gdy nieparzyste dzielniki pierwsze n to różne liczby Fermata $F_k = 2^{2^k}+1$. (Czyli: wtw. n jest postaci $2^m p_1 \cdots p_\ell$, p_i - różne liczby pierwsze Fermata).

Wiadomo, że $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=66537$ są pierwsze i są to jedyne znane liczby pierwsze Fermata (pytanie czy F_k jest pierwsza dla pewnego $k>4$ jest problemem otwartym!). Konstrukcje F_3, F_4-kąta foremnego są dzisiaj też znane ([1], ale tej drugiej Hermes poświęcił dziesięć lat!). △, □ każdy potrafi skonstruować, zaś ⬠ każdy powinien potrafić, dlatego tym się dzisiaj zajmiemy. Będzie jednak potrzebne pojęcie złotej liczby.

2. Powiadamy, że prostokąt ABCD jest złoty jeśli po odcięciu od niego kwadratu BCEF otrzymamy prostokąt podobny.



Stosunek jego dłuższego boku do krótszego nazywamy złotą liczbą i oznaczamy φ.

ABCD - złoty, gdy $\boxed{\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF}} = \frac{AD}{AB-AD}$

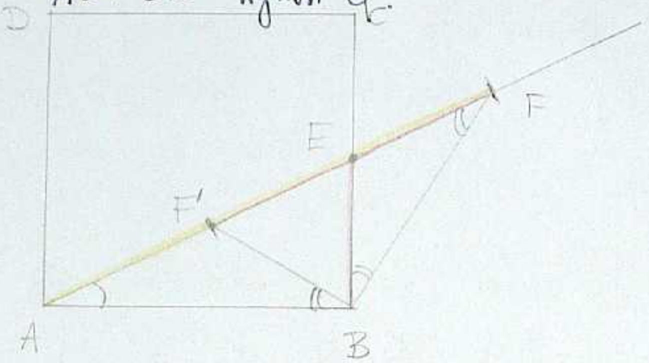
Wówczas $\varphi = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{AB/AD-1} = \frac{1}{\varphi-1}$, czyli mamy wnioski

(1) $\varphi^2-\varphi-1=0$

(2) $\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$

Analogicznie, mówimy, że podział odcinka AB punktem C jest złoty, gdy $\frac{AB}{BC} = \varphi$, tzn. $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$.

Jak, mając odcinek długości 1, zbudować odcinek długości φ (innymi słowy: jak skonstruować złoty prostokąt)? Budujemy kwadrat ABCD o boku dł. 1, połowimy punktem E bok BC. Długość odcinka AE + BE wynosi φ.



Bo Wobec $\Delta ABF' \sim \Delta ABF$ jest

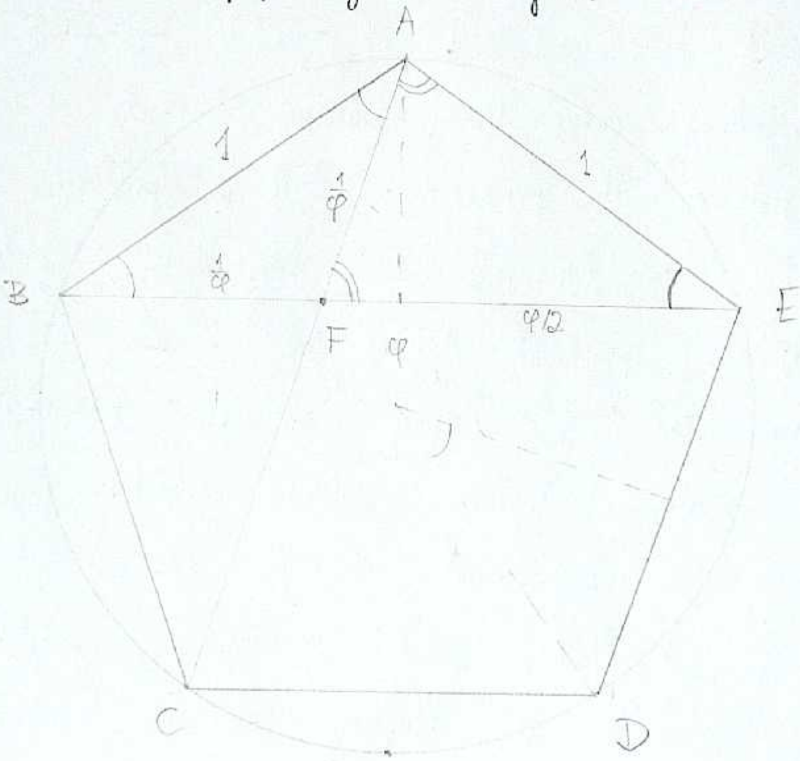
$$\frac{AF}{FF'} = \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AF'} = \frac{FF'}{AF'}$$

czyli $\frac{AF}{FF'} = \varphi$, ale $FF' = AB = 1$,

więc $AF = \varphi$.

$BE = EF = FF' \Rightarrow BFF'$ - prostokątny

3. Teraz popatrzmy na szczególną własność pięciokąta foremnego.



Z podobieństwa $\Delta ABF \sim \Delta ABE$

jest $\frac{BE}{AE} = \frac{AB}{BF} = \frac{AE}{BF}$,

ale $AE = AF$, więc

$$\frac{BE}{EF} = \frac{EF}{BF},$$

czyli podział odcinka BE punktem F jest złoty!

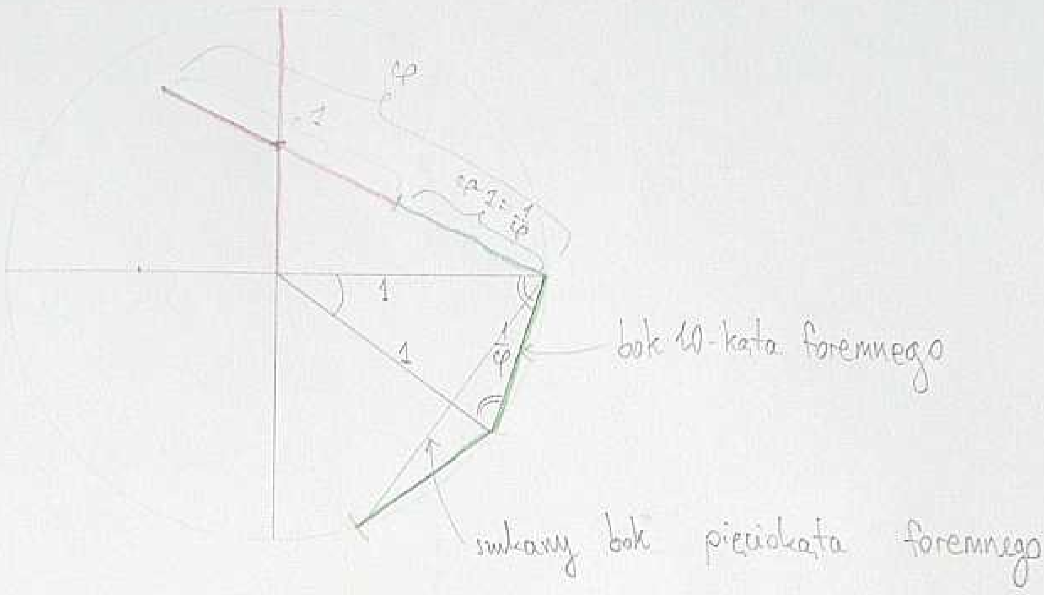
W szczególności

$$\varphi = \frac{BE}{AE}.$$

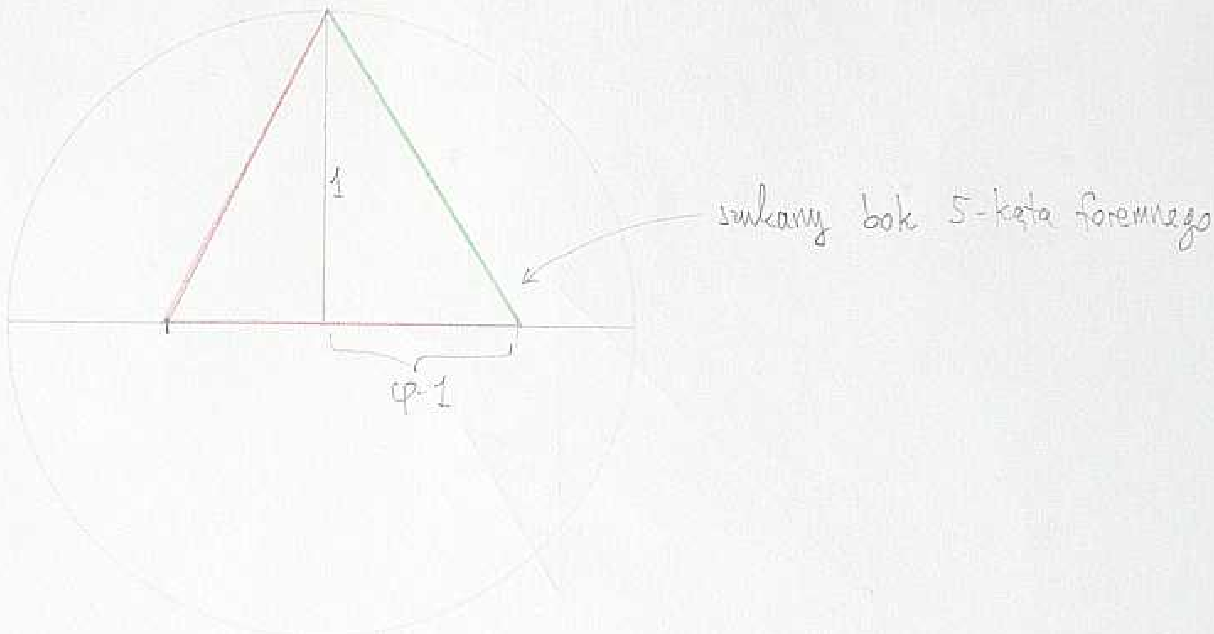
W dalszym ciągu) będzie oznaczać kąt wpisany oparty na boku pięciokąta foremnego $\left(= \frac{180°}{5} = 36°\right)$. Potrzebne będą takie trójkąty

4. Konstrukcje pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg

- (Heron z Aleksandrii)

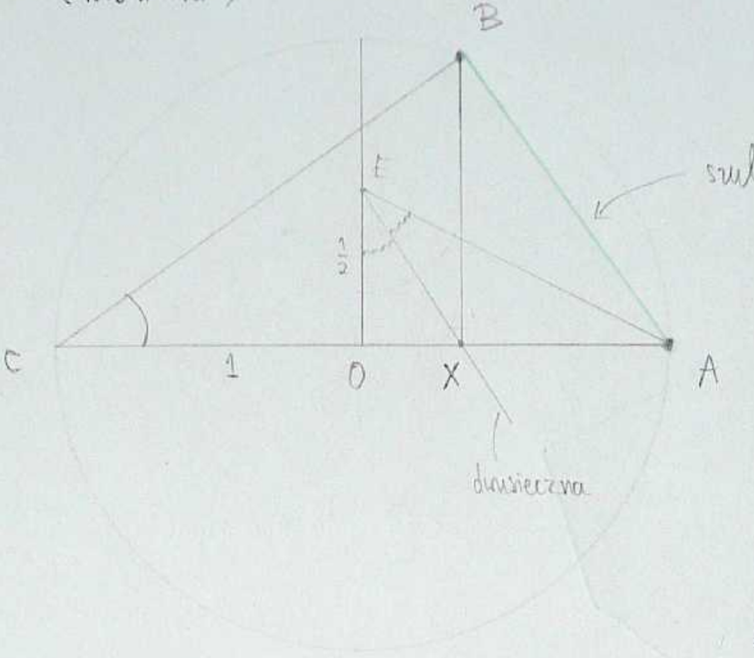


- (Ptolemeusz)



Zielony to bok 5-kąta, bo jego długość wynosi $\sqrt{1+(\varphi-1)^2} = \sqrt{\varphi^2-2\varphi+2}$ $= \sqrt{3-\varphi}$, zaś długość boku 5-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi $2\sqrt{1^2-\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \sqrt{4-\varphi^2} = \sqrt{3-\varphi}$.

• (Richmond)



szukany bok 5-kąta foremnego

Z tw. o dwusiecznej

$$\frac{AX}{OX} = \frac{AE}{EO} = \frac{\sqrt{5}/2}{1/2} = \sqrt{5},$$

więc

$$1 = OA = OX + XA = OX(1+\sqrt{5}),$$

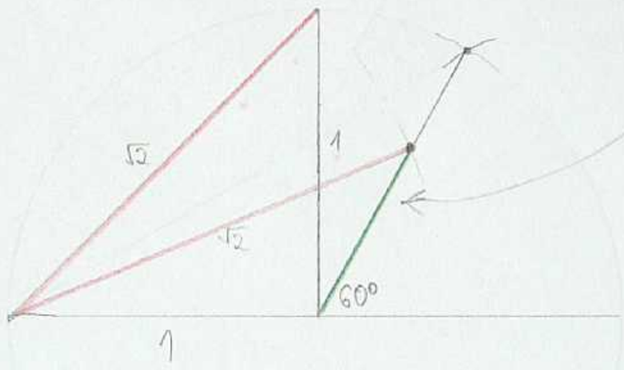
czyli $OX = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\varphi}$,

zatem $CX = CO + OX = 1 + \frac{1}{2\varphi}$

$$= \frac{2+1/\varphi}{2} = \frac{\varphi+1}{2} = \frac{\varphi^2}{2}$$

i wreszcie, ponieważ $\frac{BC}{CX} = \frac{AC}{BC}$, mamy $BC = \sqrt{AC\cdot CX} = \sqrt{2\cdot\frac{\varphi^2}{2}} = \varphi$.
Stąd BCX jest trójkątem prostokątnym o stosunku przeciwprostokątnej do dłuższej przyprostokątnej równym $\frac{\varphi}{\varphi^2/2} = \frac{1}{\varphi/2}$, więc $\angle BCA$ jest wpisany oparty na boku 5-kąta foremnego (bo wynosi ⊃).

• (Weber)



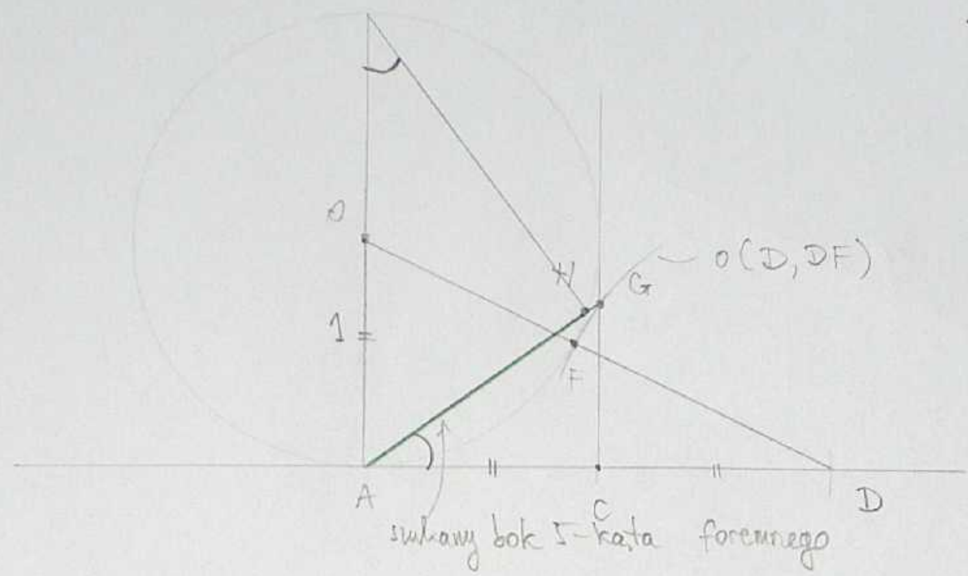
szukany bok 10-kąta foremnego

Długość boku zielonego x spełnia równanie (tw. cosinusów)

$$\sqrt{2}^2 = 1^2 + x^2 - 2x\left(-\tfrac{1}{2}\right) \iff x^2 + x - 1 = 0,$$

ale mamy $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \iff \left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\varphi} - 1 = 0$, więc $x = \frac{1}{\varphi}$ - dł. boku 10-kąta foremnego

• (Schröter)



Mamy $DF = 2(\varphi - 1)$,

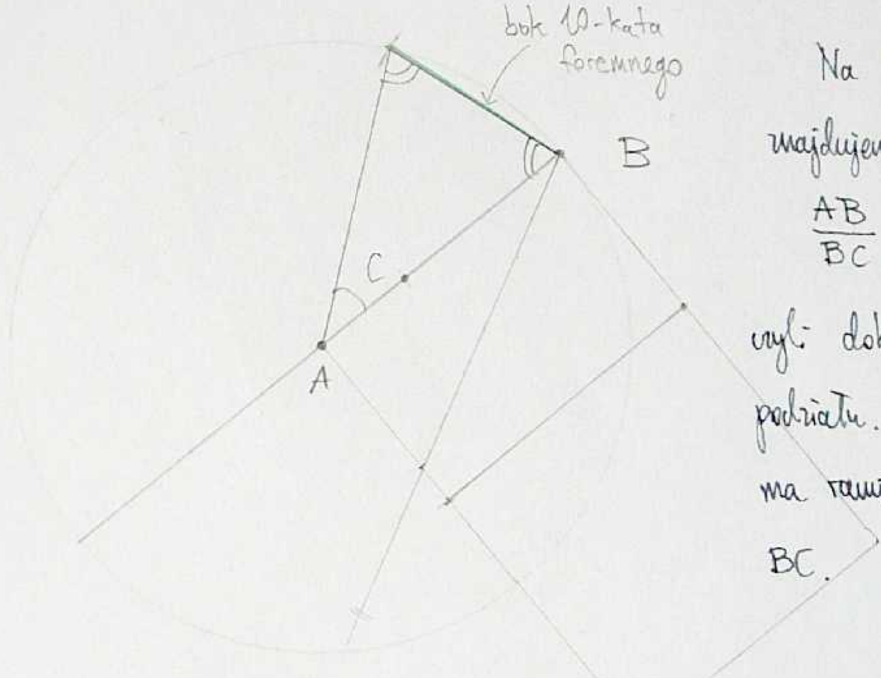
więc

$$\frac{AG}{AC} = \frac{DG}{DC} = \frac{DF}{1} = \frac{1}{\varphi/2}$$

czyli $\angle CAG =)$

– to kończy dowód poprawności.

• (Euklides – księga IV, tw. 11 – konstrukcja trójkąta równoramiennego o kącie przy podstawie dwa razy większym jak przy wierzchołku)

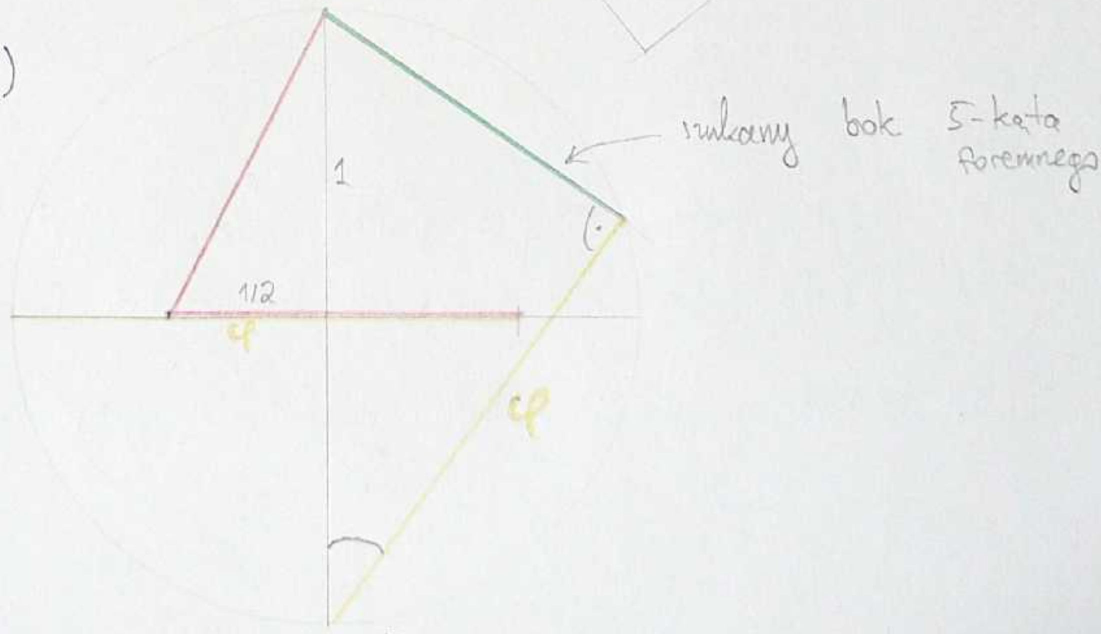


Na odcinku AB znajdujemy C t.że

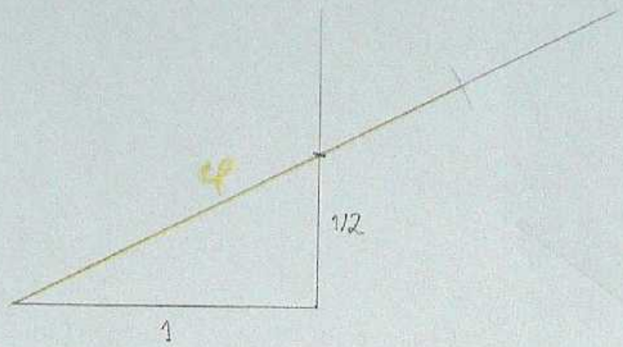
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC},$$

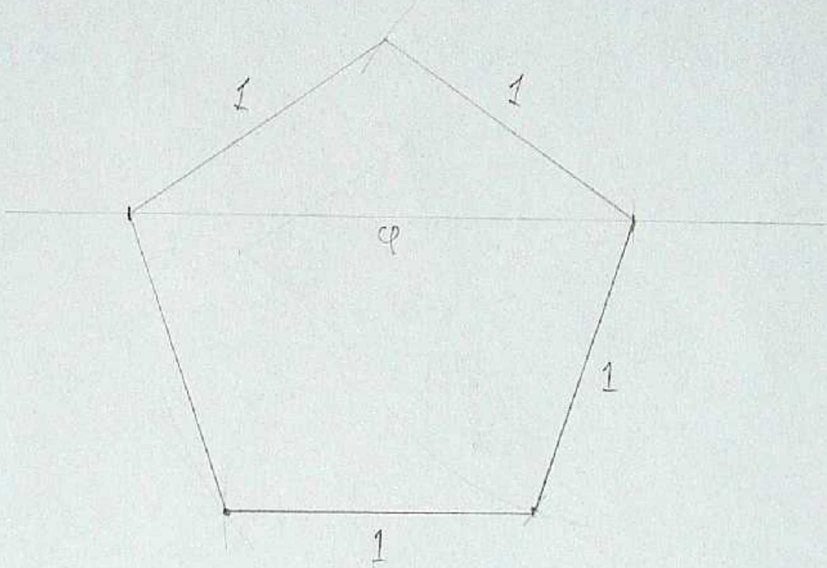
czyli dokonujemy złotego podziału. Szukany trójkąt ma ramię AB i podstawę BC.

• (φ)



5. Konstrukcja pięciokąta o zadanym boku długości 1.





Źródła

[1] H.S.M. Coxeter, „Wstęp do geometrii dawnej i nowej", PWN, Warszawa 1967

[2] M. Kordos, „Jak Gauss skonstruował siedemnastokąt foremny", Delta 8(387)2006, 10-13

[3] M. Kordos, „Wykłady z historii matematyki", Script, Warszawa 2006