Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Tomasz Tkocz
Nr albumu: 249057

Wokół nierówności Dooba

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA
w ramach Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Adama Osękowskiego
Instytut Matematyki

Czerwiec 2009

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy udowodniono, że stała w nierówności Dooba w L_p jest optymalna wykorzystując operator Hardy'ego–Littlewooda. Korzystając z nierówności maksymalnej Dooba wyprowadzono pewną nierówność maksymalną dla funkcji określonych na odcinku. Dzięki niej pokazano wreszcie, że jeśli $\int_0^1 |f| \ln_+^{\alpha+1} |f| < \infty$, to $\int_0^1 |Tf| \ln_+^{\alpha} |Tf| < \infty$, dla $\alpha \geqslant 0$, gdzie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, zaś T, to operator Hardy'ego-Littlewooda.

Słowa kluczowe

nierówność Dooba, operator Hardy'ego-Littlewooda

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

60G46 Martingales and classical analysis

Tytuł pracy w języku angielskim

On Doob's inequality

Spis treści

Wprowadzenie

Wiadomo, że stała $\frac{p}{p-1}$ w nierówności Dooba w L_p jest optymalna. Jak to udowodnić? Jeden ze sposobów (analityczny), to rozważyć operator Hardy'ego-Littlewooda, oszacować jego normę z góry korzystając z nierówności Dooba, zaś z dołu, wskazując odpowiedni przykład fukcji wybijającej normę. Zaletą tego podejścia jest to, iż dużo łatwiej wymyśleć przykład odpowiedniej funkcji niż przykład odpowiedniego martyngału.

Dlatego w rozdziale 1 zobaczymy jak z nierówności Dooba wywnioskować potrzebną nierówność dla funkcji z odcinka, dzięki której pokażemy w rozdziale 2 optymalność wspomnianej stałej. W rozdziale 1 wyprowadzimy też z nierówności maksymalnej Dooba pewną nierówność maksymalną dla funkcji. Będzie ona kluczowa w rodziale 3, gdzie zajmiemy się pewną nierównością dla funkcji z odcinka motywowaną nierównością Dooba w L_1.

Na wstępie przypomnijmy sobie jeszcze kilka użytecznych dla nas oznaczeń, definicji i twierdzeń.

Przez $L_p([a,b])$, $p \geqslant 1$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ (gdy a lub b jest nieskończone mamy na myśli odpowiednio przedziały $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ oznaczamy przestrzeń liniową funkcji całkowalnych z p-tą potęgą. Formalnie $L_p([a,b]) := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f|^p < \infty\}/\sim$, gdzie $f \sim g \iff f = g$ p.w.. Z normą $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ jest to przestrzeń Banacha.

Niech $T = [0, \infty)$ lub $\{0, 1, 2, \ldots\}$ lub podprzedział w tych zbiorach oraz ustalmy przestrzeń probabilityczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicja 0.1. **Filtracją** nazywamy wstępującą rodzinę $(\mathcal{F})_{t\in T}$ pod-σ-ciał σ-ciała $\mathcal{F}$, tzn. dla każdych $s, t \in T$, $s < t$ mamy $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Definicja 0.2. Niech dana będzie rodzina zmiennych losowych $(X_t)_{t\in T}$ całkowalnych, **adaptowanych** do filtracji $(\mathcal{F})_{t\in T}$, tzn. dla każdego $t \in T$ zmienna X_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna. Wówczas $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ nazywamy **martyngałem** (względem danej filtracji $\mathcal{F}_t$), gdy

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \text{ p. n.} \qquad \text{dla } s, t \in T, s < t.$$

Przykład 0.1. Jeśli X jest zmienną losową całkowalną, to rodzina $X_t := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$, $t \in T$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F})_{t\in T}$ (całkowalność mamy z całkowalności X, a to, że rodzina jest adaptowana i spełnia warunek martyngałowy wynika łatwo z podstawowych własności warunkowej wartości oczekiwanej).

Definicja 0.3. Dla martyngału $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ określamy jego **funkcję maksymalną** następująco

$$X_t^* := \sup_{s\in[0,t]\cap T} |X_s|.$$

Zachodzi bardzo dobrze znane twierdzenie pochodzące od Dooba

Twierdzenie 0.1. *Niech* $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *będzie martyngałem (prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego, tzn. dla p. w.* $\omega \in \Omega$ *funkcja* $t \mapsto X_t(\omega)$ *jest prawostronnie ciągła). Wówczas zachodzą nierówności*

$$\mathbb{P}(X_t^* \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}|X_t|1_{\{X_t^* \geqslant \alpha\}}, \qquad t \in T, \alpha > 0. \tag{0.1}$$

$$\mathbb{E}|X_t^*|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_t|^p, \qquad p > 1, t \in T. \tag{0.2}$$

Rozdział 1

Dwa analityczne wnioski z nierówności Dooba

Ustalmy $p > 1$. Operator Hardy'ego-Littlewooda będziemy oznaczać przez T i definiujemy go na jak następuje

$$(Tf)(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

dla rzeczywistej funkcji całkowalnej f określonej na przedziale $[0, M]$ lub $[0, +\infty)$.

Weźmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |\cdot|$ — miara Lebesgue'a) oraz filtrację $\mathcal{F}_t := \sigma([0, 1-t], \mathcal{B}([1-t, 1]))$, $t \in [0,1]$. Dla ustalonej funkcji nieujemnej i nierosnącej $f \in L_p([0,1])$ definiujemy martyngał prawostronnie ciągły (por. Przykład 0.1)

$$X_t(\omega) := \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_t)(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1-t}\int_0^{1-t} f & \text{dla } \omega < 1-t \\ f(\omega) & \text{dla } \omega \geqslant 1-t \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1^*)^p &= \int_0^1 \left(\sup_{t\in[0,1-\omega)} \left| \frac{1}{1-t}\int_0^{1-t} f \right|^p \vee |f(\omega)|^p \right) \mathrm{d}\omega \\ &= \int_0^1 \left(\sup_{s\in(\omega,1]} (Tf(s))^p \vee f(\omega)^p \right) \mathrm{d}\omega = \int_0^1 (Tf(\omega))^p \mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z następującego faktu.

Fakt 1.1. *Dla nieujemnej, nierosnącej i całkowalnej funkcji $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi*

(1) $f \leqslant Tf$

(2) Tf jest funkcją nierosnącą

Dowód. (1) jest oczywiste wobec monotoniczności f. Dla dowodu (2) ustalmy $x \in [0,1)$ oraz $h > 0$ takie, że $x + h \in [0,1]$. Mamy

$$\begin{aligned} (x+h)(Tf(x+h) - Tf(x)) &= \int_0^{x+h} f - \int_0^x f - \frac{h}{x}\int_0^x f \\ &= \int_x^{x+h} (f(t) - Tf(x))\mathrm{d}t \leqslant 0. \end{aligned}$$

□

Z nierówności Dooba w L_p (0.2) mamy więc

$$\int_0^1 (Tf)^p \leqslant C_p^p \int_0^1 f^p,$$

gdzie oznaczamy $C_p := \frac{p}{p-1}$. Zauważmy, że założenie o monotoniczności f w powyższej nierówności można opuścić bez utraty ogólności. Niech bowiem $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie nieujemną, całkowalną funkcją. Biorąc $\tilde{f}(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid |\{f > t\}| \geqslant x\}$ (czyli $\tilde{f}$ to odwrotny ogon dystrybuanty funkcji f) mamy, że $\tilde{f}$ jest nieujemną i nierosnącą fukncją o tym samym rozkładzie co f, tzn. $|\{\tilde{f} > t\}| = |\{f > t\}|$, więc w szczególności $\int_0^1 \tilde{f} = \int_0^1 f$. Ale ponadto

$$Tf \leqslant T\tilde{f}.$$

Istotnie, liczymy

$$\begin{aligned}
\int_0^x f &= \int_0^x \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,f(t)]}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^\infty |\{f \geqslant s\} \cap [0,x]|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^\infty |\{f \geqslant s\}| \wedge x \;\mathrm{d}s, \\
\int_0^x \tilde{f} &= \int_0^\infty |\{\tilde{f} \geqslant s\} \cap [0,x]|\mathrm{d}s = \int_0^\infty |[0,|\{\tilde{f} \geqslant s\}|] \cap [0,x]| = \int_0^\infty |\{f \geqslant s\}| \wedge x \;\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

więc $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \tilde{f} = T\tilde{f}(x)$.

Zatem nasza nierówność zachodzi dla dowolnej nieujemnej funkcji $f \in L_p([0,1])$, bo zachodzi dla $\tilde{f}$. Stosując ją dla $|f|$, jeśli $f \in L_p([0,1])$ już jest dowolną funkcją, wykazaliśmy tym samym następujący wniosek

Wniosek 1.1. *Niech $p > 1$. Dla dowolnej funkcji $f \in L_p([0,1])$ zachodzi nierówność*

$$\int_0^1 (T|f|)^p \leqslant C_p^p \int_0^1 |f|^p. \tag{1.1}$$

Stosując dla tego samego martyngału nierówność maksymalną Dooba (0.1) dostajemy też w jednej chwili bardzo pożyteczną nierówność

$$|\{Tf \geqslant t\}| \leqslant \frac{1}{t}\int_{\{Tf \geqslant t\}} f,$$

dla $t > 0$ i $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ nierosnącej, całkowalnej.

Można się jednak spróbować zastanowić nad analitycznym dowodem tego faktu. Ustalmy $t > 0$. Skoro Tf jest funkcją nierosnącą, to $\{Tf \geqslant t\}$ jest przedziałem $[0,r]$, dla pewnego $r \in [0,1]$ albo zbiorem pustym, gdy $t > \sup_{[0,1]} Tf$ (wtedy oczywiście w powyższej nierówności mamy równość). Przy czym z ciągłości funkcji Tf na przedziale $(0,1]$ (f jest całkowalna) wynika, że $Tf(r) = t$, gdy $t \geqslant \inf_{[0,1]} Tf = Tf(1)$, czyli wówczas

$$t|\{Tf \geqslant t\}| = tr = \int_0^r f = \int_{\{Tf \geqslant t\}} f.$$

Jeśli zaś $t < Tf(1)$, to $\{Tf \geqslant t\} = [0,1]$ i mamy

$$t|\{Tf \geqslant t\}| = t < Tf(1) = \int_0^1 f = \int_{\{Tf \geqslant t\}} f.$$

Tym samym udowodniliśmy

Wniosek 1.2. *Dla nierosnącej funkcji całkowalnej $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ oraz $t > 0$ zachodzi*

$$|\{Tf \geqslant t\}| \leqslant \frac{1}{t}\int_{\{Tf \geqslant t\}} f. \tag{1.2}$$

Jeśli ponadto $t \geqslant Tf(1)$, to zachodzi równość.

Rozdział 2

Dowód optymalności stałej $\frac{p}{p-1}$

Opierając się na wniosku 1.1 będziemy chcieli najpierw udowodnić, że

$$\|T\|_{L_p([0,\infty))\longrightarrow L_p([0,\infty))} \leqslant C_p.$$

Ustalmy w tym celu $M > 0$ i weźmy nieujemną funkcję $f \in L_p([0, M])$. Korzystając z (1.1) dla funkcji $(x \mapsto f(Mx)) \in L_p([0, 1])$ i wykonując prostą zamianę zmiennych w całce dostajemy

$$\int_0^M (Tf)^p \leqslant C_p^p \int_0^M f^p.$$

Pozostał jeszcze jeden mały krok. Mianowicie ustalmy nieujemną funkcję $f \in L_p([0,\infty))$ i weźmy $f_n := f\mathbb{1}_{[0,n]} \in L_p([0, n])$. Mamy z ostatniej równości, że

$$\int_0^\infty (Tf_n)^p \mathbb{1}_{[0,n]} \leqslant C_p^p \int_0^\infty f_n^p.$$

Ale $f_n^p \nearrow f^p$, $(Tf_n)^p\mathbb{1}_{[0,n]} \nearrow (Tf)^p$, więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej mamy

$$\int_0^\infty (Tf)^p \leqslant C_p^p \int_0^\infty f^p.$$

Stosując tę nierówność dla $|f|$, gdy $f \in L_p([0,\infty))$ jest dowolna oraz uwzględniając, że oczywiście $T|f| \geqslant |Tf|$ dostajemy natychmiast

Fakt 2.1. *Niech $p > 1$. Dla dowolnej funkcji $f \in L_p([0,\infty])$ zachodzi*

$$\int_0^\infty |Tf|^p \leqslant C_p^p \int_0^\infty |f|^p, \tag{2.1}$$

co oznacza, że $\|T\|_{L_p([0,\infty))\longrightarrow L_p([0,\infty))} \leqslant C_p$.

Zachodzi także takie oszacowanie

Fakt 2.2. $\|T\|_{L_p([0,\infty))\longrightarrow L_p([0,\infty))} \geqslant \frac{p}{p-1}, \quad p > 1.$

Dowód. Ustalmy $a \in (1, p)$ i weźmy $f(x) := \frac{1}{x^{a/p}}\mathbb{1}_{[1,\infty]}(x)$. Mamy

$$\|f\|_p^p = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \frac{1}{a-1},$$

czyli $f \in L_p([0,\infty))$. Liczymy dalej

$$(Tf)(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{s^{a/p}}\mathrm{d}s & \text{gdy } x > 1 \end{cases} = \frac{1}{1-a/p}\frac{1}{x}(x^{1-a/p}-1)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x),$$

skąd

$$\|Tf\|_p^p = \frac{1}{(1-a/p)^p}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}(x^{1-a/p}-1)^p\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-a/p)^p}\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\left(1-\frac{1}{x^{1-a/p}}\right)^p \mathrm{d}x.$$

Zatem (korzystamy z nierówności między normami dla miary probabilistycznej o gęstości $\frac{x^{-a}}{\int_1^\infty x^{-a}}$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p}\right)^p &= \frac{1}{(1-a/p)^p}\int_1^\infty (1-x^{a/p-1})^p \frac{x^{-a}}{\int_1^\infty x^{-a}}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \left(\frac{1}{1-a/p}\int_1^\infty (1-x^{a/p-1})\frac{x^{-a}}{\int_1^\infty x^{-a}}\mathrm{d}x\right)^p, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} \|T\| &\geqslant \frac{1}{1-a/p}\left(1-(a-1)\int_1^\infty x^{a/p-1-a}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{1-a/p}\left(1-\frac{a-1}{a/p-1}\,\frac{1}{x^{a-a/p}}\bigg|_1^\infty\right) \\ &= \frac{1}{1-a/p}\left(1-\frac{a-1}{a(1-1/p)}\right) = \frac{p}{p-a}\frac{1-a/p}{a(1-1/p)} \xrightarrow[a\to 1+]{} \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

□

Wobec Faktu 2.2 mamy

Wniosek 2.1. *Stała $C_p = \frac{p}{p-1}$ w nierówności Dooba w L_p (0.2) jest optymalna, tzn. nie można jej zastąpić żadną mniejszą liczbą.*

Rozdział 3

Analogon nierówności Dooba w L_1

3.1. Postawowa nierówność

Nietrudno zauważyć, że operator T nie jest ograniczony w $L_1([0,1])$ (wystarczy wziąć $b \in (0,1)$ i zauważyć, że $\|T(x \mapsto x^{-b})\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{x} \int_0^x t^{-b} = \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{1}{1-b} x^{1-b} = \frac{1}{1-b} \int_0^x x^{-b} = \frac{1}{1-b} \|x \mapsto x^{-b}\|_1$). Naśladując dowód nierówności Dooba w L_1 (por. [Doo53]) pokażemy jednak, że

Twierdzenie 3.1. *Dla $\alpha \geqslant 0$ istnieje stała $C_\alpha > 0$, że dla dowolnej funkcji całkowalnej $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_0^1 |Tf| \ln_+^\alpha |Tf| \leqslant C_\alpha \Big(1 + \int_0^1 |f| \ln_+^{\alpha+1} |f|\Big). \tag{3.1}$$

Dowód. Jak już widzieliśmy w rozdziale 2, możemy bez utraty ogólności zakładać, że f jest nieujemna i nierosnąca. Oczywiście możemy też założyć, że $f \ln_+^{\alpha+1} f$ jest całkowalna. Najpierw rozważmy przypadek $\alpha > 0$. Skoro

$$(x \ln^\alpha x)' = \ln^\alpha x + \alpha \ln^{\alpha-1} x, \quad x > 1,$$

to

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf &= \int_0^1 \left(\int_1^\infty (\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t) \mathbb{1}_{\{Tf(x) \geqslant t\}} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^\infty (\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t) |\{Tf \geqslant t\}| \mathrm{d}t \\
&\overset{(1.2)}{\leqslant} \int_1^\infty \left((\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t) \frac{1}{t} \int_0^1 f(x) \mathbb{1}_{\{Tf(x) \geqslant t\}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(x) \left(\int_1^\infty \frac{\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t}{t} \mathbb{1}_{\{Tf(x) \geqslant t\}} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{\alpha+1} \ln_+^{\alpha+1} Tf(x) + \ln_+^\alpha Tf(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \ldots \mathbb{1}_{\{Tf(x) \leqslant e^{\alpha+1}\}} \mathrm{d}x + \int_0^1 \ldots \mathbb{1}_{\{Tf(x) > e^{\alpha+1}\}} \mathrm{d}x \\
&\leqslant e^{\alpha+1} \left(\frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1)^{\alpha+1} + (\alpha+1)^\alpha \right) + \int_0^1 f(x) \frac{2}{\alpha+1} \ln_+^{\alpha+1} Tf(x) \mathbb{1}_{\{Tf(x) > e^{\alpha+1}\}} \mathrm{d}x \\
&\leqslant \tilde{C}_\alpha + \int_0^1 \frac{2}{\alpha+1} f \ln_+^{\alpha+1} Tf,
\end{aligned}$$

gdzie $\tilde{C}_\alpha := 2e^{\alpha+1}(\alpha+1)^\alpha$.

Jeśli $\alpha = 0$, to już pierwsza równość powyżej nie jest prawdziwa, ale ostatnie oszacowanie jest prawdziwe, jednak na początku trzeba rachować trochę inaczej. Otóż

$$\begin{aligned}\int_0^1 Tf &= \int_0^1 Tf \mathbb{1}_{\{Tf\leqslant 1\}} + \int_0^1 Tf \mathbb{1}_{\{Tf>1\}} \leqslant 1 + \int_0^1 (Tf-1)\mathbb{1}_{\{Tf>1\}} \\ &= 1 + \int_1^\infty |\{Tf \geqslant t\}| \overset{(1.2)}{\leqslant} 1 + \int_0^1 \frac{1}{t}\int_0^1 f\mathbb{1}_{\{Tf\geqslant t\}} = 1 + \int_0^1 f \ln_+ Tf \\ &\leqslant \tilde{C}_0 + \int_0^1 2f \ln_+ Tf.\end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że zachodzi

Lemat 3.1. *Dla $0 < a \leqslant b, \alpha \geqslant 0$ mamy*

$$a \ln_+^{\alpha+1} b \leqslant a \ln_+^{\alpha+1} a + \frac{\alpha+1}{e} b \ln_+^\alpha b.$$

Dowód. Wystarczy rozważyć kilka przypadków.

1. $a, b \leqslant 1$; wtedy nierówność jest oczywista

2. $a \leqslant 1 < b$; wtedy wobec znanej nierówności $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$, $x > 0$ mamy

$$a \ln b \leqslant \ln b \leqslant \frac{b}{e} \leqslant \frac{\alpha+1}{e} b,$$

co daje tezę w tym przypadku

3. $1 < a \leqslant b$; wtedy mamy wobec monotoniczności funkcji $x \mapsto x^\alpha$, $x \geqslant 0$, że

$$\begin{aligned}\frac{a}{\alpha+1}\left(\ln^{\alpha+1} b - \ln^{\alpha+1} a\right) &= a\int_{\ln a}^{\ln b} t^\alpha \mathrm{d}t \leqslant a\left(\ln b - \ln a\right)\ln^\alpha b \\ &= a \ln\frac{b}{a} \ln^\alpha b \leqslant a\frac{b/a}{e}\ln^\alpha b = \frac{1}{e} b \ln^\alpha b.\end{aligned}$$

□

Dzięki temu lematowi i początkowym rachunkom możemy dalej szacować tak

$$\int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf \leqslant \tilde{C}_\alpha + \int_0^1 \left(\frac{2}{\alpha+1} f \ln_+^{\alpha+1} f + \frac{2}{e} Tf \ln_+^\alpha Tf\right),$$

skąd

$$\int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf \leqslant \frac{1}{1-2/e}\left(\tilde{C}_\alpha + \frac{2}{\alpha+1}\int_0^1 f \ln_+^{\alpha+1} f\right) \leqslant C_\alpha\left(1 + \int_0^1 f \ln_+^{\alpha+1} f\right),$$

przy czym

$$C_\alpha = \frac{e}{e-2}\left(\tilde{C}_\alpha \vee \frac{2}{\alpha+1}\right) = \frac{e}{e-2}\left(2e^{\alpha+1}(\alpha+1)^\alpha \vee \frac{2}{\alpha+1}\right) = \frac{2e^{\alpha+2}}{e-2}(\alpha+1)^\alpha.$$

□

Wniosek 3.1. *Dla $\alpha \geqslant 0$, $M > 0$ istnieje stała $C_{\alpha,M} > 0$, że dla dowolnej funkcji całkowalnej $f : [0, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_0^M |Tf| \ln_+^\alpha |Tf| \leqslant C_{\alpha,M} \left(1 + \int_0^M f \ln_+^{\alpha+1} f\right).$$

Dowód. Korzystając z powyższego twierdzenia dla funkcji $x \mapsto f(Mx)$ i zamieniając zmienne w całce widać, że wystarczy wziąć $C_{\alpha,M} = C_\alpha \cdot (M \vee 1)$. □

Uwaga 3.1. Bardzo duży rząd stałej C_α, który nam wyszedł w twierdzeniu 3.1 można poprawić na liniowy! Posłużą nam do tego dwie proste obserwacje.

Fakt 3.1. *Dla funkcji wypukłej $\varphi\colon [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ oraz funkcji całkowalnej $f\colon [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ zachodzi w każdym punkcie z $[0, 1]$ następujące oszacowanie*

$$\varphi(Tf) \leqslant T(\varphi \circ f).$$

Dowód. Jest to zwykła nierówność Jensena. □

Fakt 3.2. *Funkcja $\varphi_\alpha\colon [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ zdefiniowana wzorem $\varphi_\alpha(x) := x \ln_+^\alpha x$ jest dla $\alpha \geqslant 1$ wypukła.*

Dowód. Zauważmy, że dla $x > 1$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(x) &= \ln^\alpha x + \alpha \ln^{\alpha-1} x > 0, \\ \varphi''_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{x}\left(\ln^{\alpha-1} x + (\alpha - 1)\ln^{\alpha-2} x\right) > 0, \end{aligned}$$

tzn. na przedziale $(1, \infty)$ nasza funkcja jest ściśle rosnąca i wypukła. Ponieważ $\varphi_\alpha|_{[0,1]} \equiv 0$, jest ona wypukła. □

Niech $\alpha \geqslant 1$. Mamy z powyższych obserwacji oraz twierdzenia 3.1 dla $\alpha = 0$ takie nierówności

$$\begin{aligned} \int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf &= \int_0^1 \varphi_\alpha(Tf) \leqslant \int_0^1 T(\varphi_\alpha \circ f) \\ &\leqslant C_0 \left(1 + \int_0^1 (\varphi_\alpha \circ f) \ln_+(\varphi_\alpha \circ f)\right). \end{aligned}$$

Dalej, pozostaje naturalnie oszacować punktowo wyrażenie podcałkowe jak następuje

$$\ln_+(\varphi_\alpha \circ f) \leqslant (\alpha + 1) \ln_+ f.$$

Istotnie, jeśli $\varphi_\alpha \circ f \leqslant 1$, to lewa strona jest równa 0; jeśli $\varphi_\alpha \circ f > 1$, to także $f > 1$ i mamy

$$\ln(\varphi_\alpha \circ f) = \ln f + \ln \ln^\alpha f = \ln f + \alpha \ln \ln f \leqslant (\alpha + 1) \ln f.$$

Zatem

$$\int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf \leqslant C_0(1 + \alpha) \left(1 + \int_0^1 f \ln_+^{\alpha+1} f\right).$$

3.2. Czy można poprawić $\ln^{\alpha+1}$?

Jest jeszcze jedno naturalne pytanie: czy rząd logarytmu prawej strony nierówności 3.1 można obniżyć? Dokładniej, czy dla każego (lub słabiej, pewnego) $\alpha \geqslant 0$ istnieje stała $C < \infty$ oraz liczba $\delta \in (0,1)$, że dla dowolnej funkcji całkowalnej $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ zachodzi

$$\int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf \leqslant C\left(1 + \int_0^1 f \ln_+^{\alpha+\delta} f\right) ? \tag{3.2}$$

Aby rozstrzygnąć ten problem wystarczy oczywiście wskazać odpowiedni przykład funkcji. Zauważając jednak, że nierówność (3.1) daje się w pewnym sensie odwrócić (co jest też ciekawe samo w sobie), możemy zredukować problem, jak się zaraz okaże, do dowodu intuicyjnie oczywistego faktu.

Wprowadźmy następującą klasę funkcji dla $\alpha \geqslant 0$

$$A_\alpha := \{f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty) \mid \int_0^1 f \ln_+^\alpha f < \infty\}.$$

Poniższy fakt pokazuje po co to robimy.

Fakt 3.3. *Niech $\alpha \geqslant 0$. Dla funkcji nierosnącej $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ mamy*

$$f \in A_{\alpha+1} \Longleftrightarrow Tf \in A_\alpha.$$

Dowód. Implikacja "$\Longrightarrow$" jest treścią twierdzenia 3.1.

Dla dowodu implikacji przeciwnej ustalmy najpierw $\alpha > 0$. Wobec początkowych rachunków z dowodu twierdzenia 3.1 mamy

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf &= \int_1^\infty \left(\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t\right) |\{Tf \geqslant t\}| \mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_1^\infty \left(\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t\right) |\{Tf \geqslant t\}| \mathbb{1}_{\{t \geqslant Tf(1)\}} \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{wniosek 1.2}}{=} \int_1^\infty \left(\ln^\alpha t + \alpha \ln^{\alpha-1} t\right) \frac{1}{t} \int_0^1 f(x) \mathbb{1}_{\{Tf(x) \geqslant t\}} \mathbb{1}_{\{t \geqslant Tf(1)\}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{\alpha+1} \ln^{\alpha+1} t + \ln^\alpha t\right)\Big|_{1 \vee Tf(1)}^{Tf(x)} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha+1} \int_0^1 f \ln_+^{\alpha+1} f &\overset{\text{Fakt 1.1 (1)}}{\leqslant} \int_0^1 f \left(\frac{1}{\alpha+1} \ln_+^{\alpha+1} Tf + \ln_+^\alpha Tf\right) \\
&\leqslant \int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf \\
&+ \int_0^1 f \left(\frac{1}{\alpha+1} \ln_+^{\alpha+1}(1 \vee Tf(1)) + \ln_+^\alpha (1 \vee Tf(1))\right),
\end{aligned}$$

zatem $f \in A_{\alpha+1}$, bo łatwo widzieć, że założenie $Tf \in A_\alpha$ pociąga całkowalność funkcji f (mamy $\int_0^1 f \leqslant \int_0^1 Tf \leqslant e + \int_0^1 Tf \mathbb{1}_{\{Tf \geqslant e\}} \leqslant e + \int_0^1 Tf \ln_+^\alpha Tf$). Niech teraz $\alpha = 0$, czyli f jest taka, że funkcja Tf jest całkowalna. Szacujemy analogicznie jak wyżej

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Tf &= \int_0^\infty |\{Tf \geqslant t\}| \mathrm{d}t \geqslant \int_1^\infty |\{Tf \geqslant t\}| \mathbb{1}_{\{t \geqslant Tf(1)\}} \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{wniosek 1.2}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t} \int_0^1 f(x) \mathbb{1}_{\{Tf(x) \geqslant t\}} \mathbb{1}_{\{t \geqslant Tf(1)\}} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(x) \ln t \big|_{1 \vee Tf(1)}^{Tf(x)} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\ln_+ f &\overset{\text{Fakt 1.1 (1)}}{\leqslant} \int_0^1 f\ln_+ Tf\\ &\leqslant \int_0^1 Tf + \int_0^1 f\ln(1\vee Tf(1)),\end{aligned}$$

więc $f \in A_1$. □

Ustalmy $\alpha \geqslant 0$, $\delta \in (0,1)$. Jeśli znajdziemy nierosnącą funkcję $f \in A_{\alpha+\delta}\setminus A_{\alpha+1}$, to wobec powyższego będzie $\int_0^1 Tf\ln_+^\alpha Tf = \infty$, ale $\int_0^1 f\ln_+^{\alpha+1} f < \infty$, co daje odpowiedź negatywną na postawione na początku pytanie. Pozostaje udowodnić zapowiadany, intuicyjnie jasny fakt.

Fakt 3.4. *Jeśli* $0 < \alpha < \beta$, *to* $A_\beta \subsetneq A_\alpha$.

Wniosek 3.2. *Dla* $\alpha \geqslant 0$, $\delta \in (0,1)$ *istnieje nierosnąca funkcja* $f \in A_{\alpha+\delta}\setminus A_{\alpha+1}$.

Dowód. Wystarczy wziąć jakąkolwiek funkcję g ze zbioru $A_{\alpha+\delta}\setminus A_{\alpha+1}$ i za szukane f przyjąć $\tilde{g}$ — odwrotny ogon dystrybuanty funkcji g (tak jak robiliśmy na początku rozdziału 2). Wtedy f jest niemalejąca i ma ten sam rozkład co g, czyli $f \in A_{\alpha+\delta}\setminus A_{\alpha+1}$. □

Dowód faktu 3.4. Najpierw dowodzimy, że zachodzi inkluzja. Niech $f \in A_\beta$. Mamy

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\ln_+^\alpha f &= \int_0^1 f\ln_+^\alpha f\mathbb{1}_{\{f\leqslant e\}} + \int_0^1 f\ln_+^\alpha f\mathbb{1}_{\{f>e\}}\\ &\leqslant e + \int_0^1 f\ln^\beta f\mathbb{1}_{\{f>e\}} \leqslant e + \int_0^1 f\ln_+^\beta f < \infty.\end{aligned}$$

Teraz pokażemy, że inkluzja jest właściwa. Niech $f(x) := \psi_\alpha\left(\frac{1}{x(1-\ln x)^a}\right)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ (później dobierzemy) oraz definiujemy funkcję $\psi_\alpha := (\varphi_\alpha|_{[1,\infty)})^{-1}\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, gdzie funkcja φ_α została zdefiniowana w Fakcie 3.2 (w Fakcie 3.2 widzieliśmy, że $\varphi_\alpha|_{[1,\infty)}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc odwracalną). Wtedy (całkujemy podstawiając $s = 1-\ln x$)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\ln_+^\alpha f &= \int_0^1 \varphi_\alpha\circ f = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1-\ln x)^a}\\ &= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^a} < \infty,\end{aligned}$$

o ile $a > 1$. Przyjmujemy więc, że $a > 1$. Chcemy jeszcze aby $\int_0^1 f\ln_+^\beta f = \infty$. Wykonując znowu podstawienie $s = 1-\ln x$ mamy

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\ln_+^\beta f &= \int_0^1 (\varphi_\alpha\circ f)\ln^{\beta-\alpha} f = \int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)^a}\ln^{\beta-\alpha}\psi_\alpha\left(\frac{1}{x(1-\ln x)^a}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^\infty \frac{1}{s^a}\ln^{\beta-\alpha}\psi_\alpha\left(\frac{e^{s-1}}{s^a}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\ln\psi_\alpha\left(\frac{e^{s-1}}{s^a}\right)}{s} = 1.$$

Oznacza to, że wyrażenie podcałkowe jest tego rzędu przy $s\to\infty$, co $\frac{s^{\beta-\alpha}}{s^a}$, więc całka, która nas interesuje będzie skończona, jeśli tylko $a-(\beta-\alpha) < 1$, czyli biorąc $a \in (1, 1+(\beta-\alpha))$

mamy tezę. Granicę tę zaś uzasadnia reguła de l'Hospitala i obserwacja, że (pomijamy już rachunki)

$$\left(\ln\psi_\alpha\left(\frac{e^{s-1}}{s^a}\right)\right)' = \frac{1-\frac{a}{s}}{1+\frac{a}{\ln\psi_\alpha\left(\frac{e^{s-1}}{s^a}\right)}} \xrightarrow[s\to\infty]{} 1.$$

□

Uwaga 3.2. Można uzasadnić negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie bezpośrednio. Otóż, ustalmy $\alpha \geqslant 0$, $\delta \in (0,1)$. Dla każdego $C > 0$ znajdziemy po prostu funkcję f, że nierówność (3.2) nie zachodzi.

Ustalmy zatem $C > 0$ i rozważmy $f(x) := \frac{1}{x^b}$, $x \in (0,1)$. Dobierzemy odpowiednie $b \in (0,1)$. Mamy (dwa razy całkujemy przed podstawienie, kładąc $y = \ln(1/x)$, $z = (1-b)y$)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\ln_+^\alpha f &= \int_0^1 \frac{1}{x^b}\ln^\alpha\left(\frac{1}{x^b}\right)\mathrm{d}x = b^\alpha\int_0^\infty y^\alpha e^{-(1-b)y}\mathrm{d}y\\ &= \frac{b^\alpha}{(1-b)^\alpha}\int_0^\infty z^\alpha e^{-z}\mathrm{d}z = \frac{b^\alpha}{(1-b)^\alpha}\Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

Dalej liczymy Tf i całkę z Tf

$$\begin{aligned}Tf(x) &= \frac{1}{x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^b} = \frac{1}{1-b}\frac{1}{x^b},\\ \int_0^1 Tf\ln_+^\alpha Tf &= \frac{1}{1-b}\int_0^1\frac{1}{x^b}\left(\ln\frac{1}{1-b}+\ln\frac{1}{x^b}\right)^\alpha\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{1-b}\int_0^1\frac{1}{x^b}\ln^\alpha\left(\frac{1}{x^b}\right)\mathrm{d}x = \frac{b^\alpha}{(1-b)^{\alpha+2}}\Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}&\frac{\int_0^1 Tf\ln_+^\alpha Tf}{1+\int_0^1 f\ln_+^{\alpha+\delta} f} \geqslant \frac{\frac{b^\alpha}{(1-b)^{\alpha+2}}\Gamma(\alpha+1)}{1+\frac{b^\alpha}{(1-b)^{\alpha+\delta+1}}\Gamma(\alpha+\delta+1)}\\ &= \frac{1}{(1-b)^{1-\delta}}\frac{b^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(1-b)^{\alpha+\delta+1}+b^{\alpha+\delta}\Gamma(\alpha+\delta+1)} \xrightarrow[b\to 1-]{} \infty,\end{aligned}$$

więc biorąc b dostatecznie bliskie 1 otrzymamy, że $\frac{\int_0^1 Tf\ln_+^\alpha Tf}{1+\int_0^1 f\ln_+^{\alpha+\delta} f} > C$, czyli nierówność przeciwną do (3.2).

Bibliografia

[Doo53] J. Doob, *Stochastic Processes*, New York (1953).