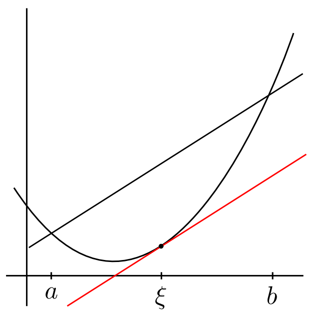
Niezwykła hiperbola, twierdzenia o wartości średniej i równania funkcyjne

Tomasz TKOCZ, Warszawa

Streszczenie

Celem artykułu jest zaprezentowanie jak twierdzenia o wartości średniej mogą prowadzić do równań funkcyjnych. Jako zastosowanie takiego podejścia pokazano kilka, jak się wydaje mało znanych, własności hiperboli.

O co chodzi w twierdzeniach o wartości średniej? O to, że istnieje pewien punkt średni. Najsławniejsze jest twierdzenie Lagrange'a.



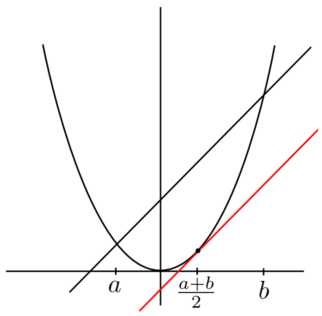
Rys. 1. Twierdzenie Lagrange'a.

Twierdzenie 1 (Lagrange)**.** *Jeśli funkcja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest ciągła i różniczkowalna na* (a, b)*, to istnieje* **punkt średni** $\xi \in (a, b)$ *dla którego*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Interpretując geometrycznie, istnieje punkt w którym styczna jest równoległa do siecznej. Interpretacja fizyczna może zaś być np. taka, że jadąc Kawasaki po pustyni, dla dowolnego przedziału czasu $[t_1, t_2]$ istnieje chwila $t_0 \in [t_1, t_2]$, w której prędkość Kawasaki jest równa jego prędkości średniej po całym przedziale czasu $[t_1, t_2]$.

Stąd już krok do równań funkcyjnych, bo można zapytać: *dla jakich funkcji będzie tak, że punkt średni* ξ *jest zawsze średnią arytmetyczną końców przedziału, czyli środkiem przedziału* (a, b)*?* Można też oczywiście pytać o inne średnie, i trzeba. Solidną literaturą na ten temat jest monografia [SR] i praca [Ku] prof. Marka Kuczmy, twórcy polskiej szkoły równań funkcyjnych.



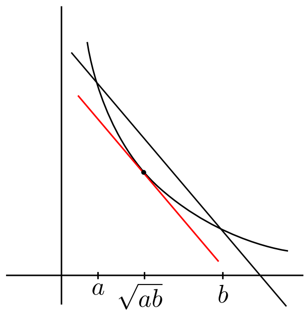
Rys. 2. Parabola a twierdzenie Lagrange'a (por. tw. 3).

Weźmy np. parabolę zadaną jako wykres funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2$. Dla ustalonych liczb $a \neq b$ (końców przedziału) mamy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b = f'\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Zatem dla paraboli punkt średni z tezy twierdzenia Lagrange'a okazuje się być średnią arytmetyczną końców przedziału. Spróbujmy analogicznie przebadać co się dzieje dla hiperboli. Weźmy więc, powiedzmy, funkcję $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ i zauważmy, że teraz

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1/b - 1/a}{b - a} = -\frac{1}{ab} = f'\left(\sqrt{ab}\right).$$



Rys. 3. Hiperbola a twierdzenie Lagrange'a (por. tw. 4).

Okazuje się tym samym, że dla hiperboli rolę punktu średniego gra średnia geometryczna. Skoro tak dobrze nam idzie, może uda nam się znaleźć nietrywialną krzywą (dla funkcji liniowej oczywiście każdy punkt $\xi \in (a, b)$ w tezie twierdzenia Lagrange'a jest dobry) dla której średnia harmoniczna wzięta z końców przedziału będzie punktem średnim? Testując jeszcze kilka innych elementarnych funkcji, które od razu przychodzą do głowy i widząc, że nie wychodzi, możemy zacząć się bać. Trzeba jednak zachować spokój i najpierw postawić dobrze problem. Chodzi przecież o to, aby znaleźć wszystkie funkcje f, powiedzmy z $(0, \infty)$ w $\mathbb{R}$, różniczkowalne, o tej własności, że dla dowolnych różnych liczb dodatnich a, b ma miejsce równość

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'\left(\frac{2}{1/a + 1/b}\right).$$

W ten sposób dostaliśmy do rozwiązania równanie funkcyjno–różniczkowe. Odważny krok, polegający na uogólnieniu tego równania w ten sposób, że zamiast pochodnej wprowadzimy do gry nową niewiadomą funkcję h, pozwala w zadziwiający sposób je rozwiązać. Pora udowodnić odpowiednie twierdzenie.

Interesujące, prawda? Dla średniej harmonicznej nie ma nietrywialnej krzywej!

Twierdzenie 2. *Funkcje* $f, h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *spełniają*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = h\left(\frac{2}{1/a+1/b}\right), \qquad a, b > 0,\ a \neq b,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \alpha x + \beta, \quad h(x) = \alpha,$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dowód. Oczywiście łatwo sprawdzić, że funkcje $f(x) = \alpha x + \beta$, $h(x) = \alpha$ spełniają podane równanie. Dowodzimy więc w drugą stronę, czyli załóżmy, że dla funkcji f, h nasze równanie funkcyjne jest spełnione. Równoważnie, już dla wszystkich $a, b > 0$, mamy

$$f(a) - f(b) = (a-b)h\left(\frac{2}{1/a+1/b}\right).$$

Jest jasne, że bez utraty ogólności możemy zakładać, że $f(1) = 0$. Wstawiając $b = 1$ dostajemy

$$f(a) = (a-1)h\left(\frac{2}{1+1/a}\right), \qquad a > 0.$$

Tak wyliczone f wstawiamy do wyjściowego równania otrzymując już tylko równanie funkcyjne z jedną niewiadomą — funkcją h

$$(a-1)h\left(\frac{2}{1+1/a}\right) - (b-1)h\left(\frac{2}{1+1/b}\right) = (a-b)h\left(\frac{2}{1/a+1/b}\right).$$

Zamieńmy zmienne $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ i wprowadźmy funkcję $H : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$H(x) = h\left(\frac{2}{x}\right), \qquad x > 0.$$

Wówczas

$$\frac{1-x}{x}H(1+x) - \frac{1-y}{y}H(1+y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) H(x+y), \qquad x, y > 0.$$

Znowu łatwo widać, że bez utraty ogólności możemy założyć, że $H(1) = 0$. Wstawiamy $y = 1 - x$ dostając

$$\frac{1-x}{x}H(1+x) = \frac{x}{1-x}H(2-x), \quad \text{dla } x \in (0,1).$$

Wykorzystując to przy zamianie y na $1-y$ w ostatnim równaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-y}\right) H(x+1-y) &= \frac{1-x}{x}H(1+x) - \frac{y}{1-y}H(2-y) \\ &= \frac{1-x}{x}H(1+x) - \frac{1-y}{y}H(1+y) \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) H(x+y), \qquad x > 0, y \in (0,1).\end{aligned}$$

Stąd, dla $x > 0$, $0 < y < 1$, $x + y \neq 1$ i $x \neq y$ mamy

$$\frac{H(x+y)}{1-(x+y)} = \frac{H(x+1-y)}{1-(x+1-y)} \frac{xy}{x(1-y)}.$$

Zamieniamy oczywiście zmienne

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 1 - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{u+v-1}{2} \\ y = \dfrac{u-v+1}{2} \end{cases}$$

i definiujemy funkcję pomocniczą $G(u) = \frac{H(u)}{1-u}$, dla $u > 0$, $u \neq 1$, otrzymując

$$G(u) = G(v)\frac{1+u-v}{1-u+v}, \quad (1)$$

dla $u, v > 0$, $u, v \neq 1$, $u+v > 1$, $v-1 < u < 1+v$, co można zgrabniej napisać tak

$$u, v > 0 \quad u, v \neq 1, \quad |v-1| < u < v+1.$$

Pokażemy teraz, że funkcja G musi być stale równa 0. W tym celu ustalmy liczbę naturalną $n \geq 2$ i wstawmy do (1) $v = n$. Dostaniemy

$$G(u) = G(n)\frac{1-n+u}{1+n-u}, \qquad n-1 < u < n+1.$$

Mamy więc obliczone G na przedziale $(n-1, n+1)$. Nie znamy jeszcze tylko wartości stałej $G(n)$. Łatwo ją jednak obliczyć używając (1) i dopiero co otrzymanego wzoru. Wstawiając $u = n - \frac{1}{2}$, $v = n + \frac{1}{3}$, mamy

$$G(n)\frac{1-n+n-\frac{1}{2}}{1+n-n+\frac{1}{2}} = G(n)\frac{1-n+n+\frac{1}{3}}{1+n-n-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1-\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}},$$

czyli

$$G(n)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{11}\right) = 0,$$

skąd $G(n) = 0$. Zatem $G = 0$ na $(n-1, n+1)$. Wracamy i mamy też, że $H = 0$ na przedziale $(n-1, n+1)$. Z równania na f

$$f(a) = (a-1)H\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

mamy zatem, że $f(a) = 0$ dla a takich, że $1 + \frac{1}{a} \in (n-1, n+1)$, czyli dla $a \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-2}\right)$. Z dowolności $n \geq 2$ mamy, że $f = 0$ na $\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-2}\right) = (0, \infty)$. Tym samym wywnioskowaliśmy wreszcie, że $f \equiv 0$, co od razu daje, że $h \equiv 0$. Ale zakładaliśmy po drodze, że $H(1) = 0$ oraz $f(1) = 0$. Ogólnie, dostaniemy $h(x) = h(1) =: \alpha$ i $f(x) = f(1) + (x-1)\alpha = \alpha x + \beta$, gdzie $\beta := f(1) - \alpha$.

W duchu tych rozważań zapytajmy na ile parabola i hiperbola są wyjątkowe. Okazuje się, że z punktu widzenia odpowiednio średniej arytmetycznej i geometrycznej jako punktu średniego z tezy twierdzenia Lagrange'a te krzywe są jedyne w swoim rodzaju.

Twierdzenie 3. *Funkcje $f, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają*

$$\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = h\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad a \neq b,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad h(x) = 2\alpha x + \beta,$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4. *Funkcje $f, h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają*

W razie kłopotów można zajrzeć np. do [Acz] lub [Tko].

$$\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = h\left(\sqrt{ab}\right), \qquad a, b > 0, a \neq b,$$

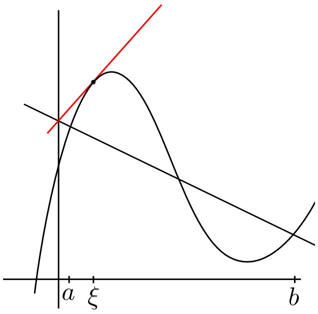
wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma, \quad h(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \beta,$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Dowody tych twierdzeń są niemalże identyczne. Czytelnik jest zaproszony do samodzielnego wymyślenia ich (można próbować naśladować dowód twierdzenia 2; wszystko powinno wyjść prościej i szybciej, bo przypadek średniej harmonicznej okazuje się być najbardziej paskudny).

Spróbujmy średniej harmonicznej poszukać jednak gdzie indziej. W 1946 roku (patrz [Po]) Pompeiu znalazł inne twierdzenie o wartości średniej.



Rys. 4. Twierdzenie Pompeiu.

Twierdzenie 5 (Pompeiu) **.** Niech $[a, b]$ będzie przedziałem *niezawierającym* zera. Jeśli funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna na przedziale (a, b), to istnieje punkt średni $\xi \in (a, b)$ dla którego

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Geometrycznie chodzi o to, że istnieje punkt ξ w którym jeśli się wystawi styczną do wykresu funkcji f, to przetnie ona oś Oy w tym samym punkcie co sieczna przechodząca przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Istotnie, równanie takiej siecznej to

$$y = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a).$$

Przecina ona oś Oy w punkcie o rzędnej

$$-a\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a) = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

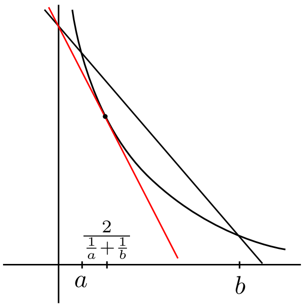
Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(c, f(c))$ ma postać

$$y = (x - c)f'(c) + f(c),$$

więc ta styczna przecina oś Oy w punkcie o rzędnej $f(c) - cf'(c)$. Zgadza się!

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny. Wystarczy zauważyć, że przecież

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{f(b)/b - f(a)/a}{1/b - 1/a} = \frac{F(v) - F(u)}{v - u},$$



Rys. 5. Hiperbola a twierdzenie Pompeiu (por. tw. 6).

gdzie zamieniamy zmienne w argumencie według wzoru $x \mapsto \frac{1}{x}$ i wprowadzamy pomocniczą funkcję $F(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. łatwo zobaczyć, że wystarczy już tylko zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji F i przedziału o końcach u, v.

Policzmy lewą stronę np. dla naszej ulubionej hiperboli $f(x) = 1/x$. Mamy

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{a/b - b/a}{a - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Dzieje się cud, bowiem prawa strona dla średniej harmonicznej $\xi = \frac{2}{1/a+1/b}$ wynosi tyle samo. Co więcej, z twierdzenia 3 i przedstawionej techniki dowodu twierdzenia Pompeiu od razu dostajemy wniosek, że hiperbola jest jedyną funkcją o tej własności.

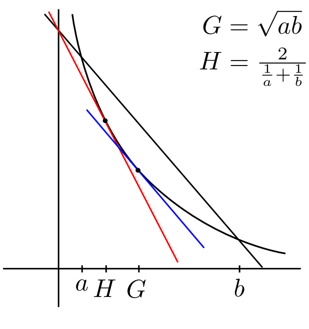
Twierdzenie 6. *Funkcje $f, h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają*

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = h\left(\frac{2}{1/a + 1/b}\right), \qquad a, b > 0, a \neq b,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma, \quad h(x) = f(x) - xf'(x),$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.



Rys. 6. Niezwykła własność hiperboli.

Niezwykła własność hiperboli o którą chodzi w tytule jest więc taka, że jest to jedyna krzywa dla której punkt średni Lagrange'a jest zawsze średnią geometryczną, a punkt średni Pompeiu — średnią harmoniczną końców przedziału. Warto pooglądać to sobie na rysunku 6. Jako produkt uboczny, widzimy też na obrazku dobrze znaną nierówność między tymi średnimi.

Całą tę zabawę można kontynuować na co najmniej dwa sposoby. Po pierwsze, można się zapytać gdzie jest średnia kwadratowa? Po drugie, są przecież jeszcze inne twierdzenia o wartości średniej (np. twierdzenie Fletta, patrz [Fl]). Ale to już są tematy na inną opowieść. . .

Literatura

[Acz] J. Aczél, *A Mean Value Property of the Derivative of Quadratic Polynomials-without Mean Values and Derivatives*, Mathematics Magazine **58** (1985), 42–45.

[Fl] T. M. Flett, *A Mean Value Theorem*, The Mathematical Gazette, **42** (1958), 38–39.

[Ku] M. Kuczma, *On the quasiarithmetic mean in a mean value property and the associated functional equation*, Aequationes Mathematicae **41** (1991), 33–54.

[Po] D. Pompeiu, *Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis*, Mathematica, Timisoara **22** (1946), 143–146.

[SR] P. K. Sahoo, T. Riedel, *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific Publishing Co., NJ 1998.

[Tko] T. Tkocz, *Od własności paraboli do równania funkcyjnego*, Delta **3** (418) 2009, 4–5.