Egzamin ustny, kule i prawdopodobieństwo

Tomasz TKOCZ[*]

Wyobraź sobie, Młody Czytelniku, że jesteś już studentem i czeka Cię bardzo trudny egzamin ustny (a może, tak jak piszący te słowa, doskonale z autopsji znasz to przyjemne wyzwanie?). Profesor przygotował zestaw dwudziestu pytań, ale Ty zdążyłeś nauczyć się odpowiedzi tylko na pewne dziesięć z nich; nazwijmy je *dobrymi* pytaniami, pozostałe, na które nie znasz odpowiedzi, niech nazywają się *złe*. Egzamin ustny u naszego Profesora odbywa się na bardzo prostych zasadach – losuje on jedno pytanie (każde z równym prawdopodobieństwem) i jeśli potrafisz na nie odpowiedzieć, to brawo – zdałeś, a jeśli nie, to nie (i czeka Cię egzamin w sesji poprawkowej). Sprawa jest zatem bardzo prosta.

W przedstawionej sytuacji szansa na to, że zdasz egzamin, jest równa $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Nie wygląda to zbyt wesoło. Ale myślisz sobie: – *Nie jestem sam – mam czternastu kolegów, którzy też muszą iść na ten ustny. To są moi bardzo dobrzy koledzy, więc nie będę musiał zdawać jako pierwszy. Profesor jest świetnie przygotowany – ułożył więcej pytań, niż jest zdających, ma zapas i dlatego zwykł raz użytego pytania nie zadawać ponownie. Może więc, aby zwiększyć szansę zdania egzaminu, opłaca mi się poczekać trochę, by zobaczyć, które z pytań zostały już wylosowane – bardzo mili koledzy powiedzą mi przecież, jakie pytania wylosowali – ja już ich nie wylosuję.*

I co Ty, Drogi Czytelniku, na to rozumowanie? Czy uda się w ten sposób ukryć własne nieprzygotowanie do egzaminu? Czy, na przykład, gdy wejdziesz jako siódmy, będziesz miał większe szanse zdania egzaminu niż $\frac{1}{2}$? Chyba nie sposób tak od razu odpowiedzieć na to pytanie. Spróbujmy zatem po kolei rachować.

Przypuśćmy, że wchodzisz jako drugi. Jeśli student, który zdawał przed Tobą, wylosował *dobre* pytanie (z prawdopodobieństwem $\frac{10}{20}$), to zdasz z prawdopodobieństwem $\frac{9}{19}$, a jeśli – przeciwnie – wylosował *złe* pytanie (oczywiście też z prawdopodobieństwem $\frac{10}{20}$), to zdasz z prawdopodobieństwem $\frac{10}{19}$. Zatem szansa pomyślnego zdania egzaminu, gdy wchodzisz jako drugi, jest równa $\frac{9}{19} \cdot \frac{10}{20} + \frac{10}{19} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Znowu $\frac{1}{2}$!

Korzystamy tutaj z pojęcia *prawdopodobieństwa warunkowego* zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B. Oznaczamy je jako $\mathrm{P}(A|B)$ i definiujemy tak

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)},$$

gdzie $A \cap B$ to zdarzenie *zaszło* A i B. Zgadza się to z intuicją – rozpatrzmy np. sytuację, gdy A to zdarzenie, że w rzucie kostką wypadła dwójka (czyli $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$), a B – że wypadła parzysta liczba oczek (czyli $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$): wiemy, iż prawdopodobieństwo wypadnięcia dwójki, pod warunkiem, że wyrzuciliśmy parzystą liczbę oczek, powinno wynosić $\frac{1}{3}$, a to właśnie zgadza się z podanym wzorem, bo $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

Chcąc obliczyć tym sposobem szansę pomyślnego wyniku, gdy wejdziemy jako trzeci, widzimy, że trzeba będzie rozważyć cztery przypadki, a np. gdy wejdziemy jako siódmi – aż 2^7.

A może nie warto liczyć, bo ta szansa zawsze będzie równa $\frac{1}{2}$, niezależnie od tego, kiedy wejdziemy? (Bo niby dlaczego miałby istnieć sposób na przechytrzenie Profesora?) Ale jak to sprawdzić?

Zauważmy, że zdarzenie *zdasz, wchodząc jako k-ty* to tak naprawdę zdarzenie *k-te pytanie wylosowane przez Profesora było dobre*. Profesor losuje bez zwracania, z czego wynika, że problem, przed którym stanęliśmy, może być równoważnie sformułowany następująco: *losujemy bez zwracania kule, każdą zawsze z jednakowym prawdopodobieństwem, z urny, która początkowo zawiera dziesięć dobrych kul i dziesięć złych; czy prawdopodobieństwo wylosowania kuli dobrej za k-tym razem wynosi* $\frac{1}{2}$?

Czasami tak bywa, że łatwiej udowodnić coś nieco bardziej ogólnego. W naszym przypadku, z powodu zmiany zawartości urny w czasie losowania, wygodniej będzie – jak się za chwilkę okaże – wykazać, że jest prawdziwa równość

$$(*) \qquad \mathrm{P}(D_k^{d,z}) = \frac{d}{d+z}, \qquad \text{dla } k = 1, \ldots, d+z,$$

gdzie $D_k^{d,z}$ to zdarzenie polegające na wylosowaniu za k-tym razem *dobrej* kuli, jeśli początkowo urna zawierała d kul *dobrych* i z *złych*. Dalej przyda nam się jeszcze analogiczne oznaczenie $Z_k^{d,z}$ dla zdarzenia polegającego na wylosowaniu w tej samej sytuacji kuli *złej*.

[*]student, Wydział Fizyki i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mamy oczywiście dla dowolnych d i z

$$\mathrm{P}(D_1^{d,z}) = \frac{d}{d+z} \quad \text{i} \quad \mathrm{P}(Z_1^{d,z}) = \frac{z}{d+z}.$$

Załóżmy (będziemy rozumować indukcyjnie, co tutaj jest bardzo naturalne), że $(*)$ zachodzi dla pewnego $k < d+z$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D_{k+1}^{d,z}) &= \mathrm{P}(D_{k+1}^{d,z}|D_1^{d,z})\cdot\mathrm{P}(D_1^{d,z}) + \mathrm{P}(D_{k+1}^{d,z}|Z_1^{d,z})\cdot\mathrm{P}(Z_1^{d,z}) = \\ &= \mathrm{P}(D_k^{d-1,z})\cdot\frac{d}{d+z} + \mathrm{P}(D_k^{d,z-1})\cdot\frac{z}{d+z} \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{d-1}{d-1+z}\cdot\frac{d}{d+z} + \frac{d}{d-1+z}\cdot\frac{z}{d+z} = \\ &= \frac{d}{d+z}\cdot\left(\frac{d-1}{d-1+z} + \frac{z}{d-1+z}\right) = \frac{d}{d+z},\end{aligned}$$

co pokazuje prawdziwość $(*)$ dla dowolnego k.

Stosujemy tutaj tzw. wzór na prawdopodobieństwo całkowite: jeśli B_1, B_2 to takie dwa wykluczające się zdarzenia, że któreś z nich na pewno zachodzi, to dla dowolnego zdarzenia A jest

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A\cap(B_1\cup B_2)) = \\ &= \mathrm{P}(A\cap B_1) + \mathrm{P}(A\cap B_2) = \\ &= \mathrm{P}(A|B_1)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A|B_2)\mathrm{P}(B_2).\end{aligned}$$

U nas bierzemy $B_1 = D_1^{d,z}$, $B_2 = Z_1^{d,z}$.

Zatem nawet gdy wejdziemy na egzamin jako ostatni, szansa jego zdania będzie równa $\frac{1}{2}$, bo $\mathrm{P}(D_{15}^{10,10}) = \frac{10}{10+10}$. Być może kłóci się to troszkę z intuicją, ale dowodzi, że żadne chytre strategie nic tu nie pomogą – jaką część pytań opanowaliśmy, taką mamy szansę zdania egzaminu.

Może jednak strategie, jakie rozważaliśmy, były zbyt proste? Na przykład, student wchodził na egzamin w deterministycznej chwili k, czyli w ogóle nie wykorzystywał informacji – co prawda losowej, ale zawsze dodatkowej – którą przekazywali mu zdający do chwili k koledzy. Tzn. nie brał pod uwagę informacji, które pytania profesor już zużył. Okazuje się jednak, że nawet stosując jakąś niby bardziej przebiegłą strategię (np. student wchodzi tuż po tym, gdy zostanie zadane któreś ze *złych* pytań), w której wykorzystamy wszelkie informacje, jakich dostarczyli nam zdający wcześniej koledzy, zawsze uzyskamy prawdopodobieństwo zdania egzaminu równe $\frac{1}{2}$. Ale ścisły dowód tego faktu jest już mniej elementarny. Niemniej zachęcam Czytelników do sprawdzenia, czy tak jest w przypadku samodzielnie wymyślonych konkretnych strategii, albo do prób wykazania tego ogólnego faktu w przypadku mniejszych danych – na przykład dwóch *dobrych*, dwóch *złych* pytań i łącznie trzech studentów.

Funkcje odwrotne do siebie

Funkcja $f_1(x) := x$ zwraca (jak brzydko mówią informatycy) to, co się do niej włoży. Funkcja $f_2(x) := -x$ zwraca nie całkiem to samo, ale gdy ją wykonać dwukrotnie, znów wracamy do tego, z czego wyszliśmy: $f_2(f_2(x)) = f_2(-x) = x$. Takie funkcje to *inwolucje*. Spróbujmy znaleźć jeszcze inne inwolucje wśród *funkcji wymiernych*, to jest postaci $f(x) = V(x)/W(x)$, gdzie V i W są wielomianami.

Od razu przychodzi do głowy funkcja $f_3(x) := 1/x$. I od razu widać, że to inwolucja. Zaraz potem sprawdzamy $f_4(x) := -1/x$. Faktycznie – to też inwolucja:

$$f_4(f_4(x)) = \frac{-1}{f_4(x)} = \frac{-1}{\frac{-1}{x}} = x.$$

No, a dalej? Sprawdzamy $f_5(x) := 2/x$ – też się zgadza! No to już wiemy, że każda funkcja postaci $f_{(\alpha)}(x) := \alpha/x$ dla $\alpha \neq 0$ jest inwolucją.

Mamy więc już nieskończenie wiele inwolucji wśród funkcji wymiernych. Ale czy odnaleźliśmy już wszystkie?

Nie trzeba specjalnej wyobraźni, by stwierdzić, że nie – przecież inwolucją jest także $f_6(x) := 1-x$.

No to spróbujmy całkiem fantazyjnie – może $f_7(x) := (x+1)/(x-1)$? Sprawdzamy:

$$f_7(f_7(x)) = f_7\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2x}{2} = x,$$

czyli i ta funkcja okazała się inwolucją.

Wyraźnie widać, że poszukiwania inwolucji wśród funkcji wymiernych należałoby kontynuować. Nie sądzę jednak, że można łatwo wpaść na to, jakie jeszcze funkcje należą do tej rodziny. Ja po prostu zapytałem algebraików. Odpowiedź okazała się zaskakująca:

Wśród funkcji wymiernych inwolucje to $f_{(\alpha)}$ dla $\alpha \neq 0$, oraz $f_{(\alpha,\beta)}(x) := \dfrac{x+\alpha}{\beta\cdot x - 1}$ dla $\alpha\cdot\beta \neq -1$ i tylko one.

Czytelnik Niedowiarek sprawdzi, że dla dozwolonych α i β faktycznie $f_{(\alpha,\beta)}(f_{(\alpha,\beta)}(x)) = x$; Czytelnik Ambitny poszuka dowodu, że żadnej innej inwolucji będącej funkcją wymierną nie ma. Natomiast Czytelnik Podchwytliwy zapyta: – *A gdzie funkcja f_2 albo f_6?*

Marek KORDOS