

Accélération de fronts de réaction-diffusion par une ligne de diffusion rapide.

Laurent Dietrich
Dir. H. Berestycki et J.-M. Roquejoffre

Institut de mathématiques de Toulouse

Rencontres doctorales Lebesgue – 13 octobre 2014



1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

4 Perspectives

Modèle étudié

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi (2012) :

$$\partial_t u - D \partial_{xx}^2 u = v(t, x, 0) - \mu u$$

$$d \partial_y v = \mu u - v$$

$$\partial_t v - d \Delta v = f(v)$$

Modèle étudié

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi (2012) :

$$\partial_t u - D \partial_{xx}^2 u = v(t, x, 0) - \mu u$$

$$d \partial_y v = \mu u - v$$

$$\partial_t v - d \Delta v = f(v)$$

- Motivation : illustrer le fait que les réseaux de transports augmentent la vitesse des invasions biologiques.

Motivations

- Ex. 1 : épidémies. La peste de 1347 a diffusé rapidement en Europe à partir des axes commerciaux.

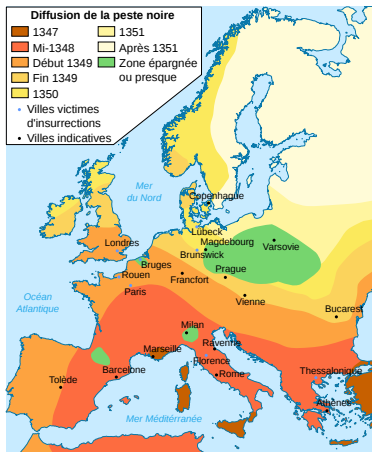


Figure: Source : Wikipédia

- Ex. 2 : la chenille processionnaire du pin. Va vers le Nord à cause du réchauffement global, mais on pense que les routes jouent un rôle (cf. l'invasion en Île de France).



Figure: Chenille processionnaire (Auray, Bretagne). Source : Wikipédia

Question soulevée

Quel est le comportement en temps grand de u et v ?
Quelle est l'influence de la route sur ce comportement ?

1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

3 Retour au modèle

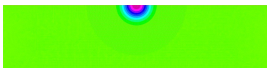
- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

4 Perspectives

Réaction-diffusion ?

- Compétition entre la dispersion... :

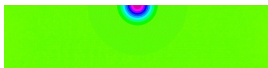
$$u_t - \Delta u = 0$$



Réaction-diffusion ?

- Compétition entre la dispersion... :

$$u_t - \Delta u = 0$$



- ... et la réaction

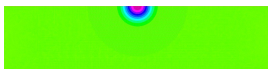
$$u_t = f(u)$$



Réaction-diffusion ?

- Compétition entre la dispersion... :

$$u_t - \Delta u = 0$$



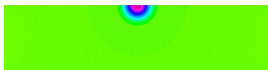
- ... et la réaction

$$u_t = f(u)$$



- Équilibres non triviaux entre les états stationnaires 0 et 1 ?

$$u_t - \Delta u = f(u)$$



Élément de comparaison : le cas KPP homogène

Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1 - u)$ avec $u_0 \in C_c^\infty$, $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors

- Pour tout $c > 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout $c < 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Élément de comparaison : le cas KPP homogène

Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1 - u)$ avec $u_0 \in C_c^\infty$, $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors

- Pour tout $c > 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout $c < 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici $c^* = 2$ est la **vitesse de propagation**.

Élément de comparaison : le cas KPP homogène

Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1 - u)$ avec $u_0 \in C_c^\infty$, $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors

- Pour tout $c > 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout $c < 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici $c^* = 2$ est la **vitesse de propagation**.

Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$ avec $f(u) = u(1 - u)$.

Élément de comparaison : le cas KPP homogène

Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1 - u)$ avec $u_0 \in C_c^\infty$, $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors

- Pour tout $c > 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout $c < 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici $c^* = 2$ est la **vitesse de propagation**.

Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$ avec $f(u) = u(1 - u)$.
- $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \Leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$ donc

Élément de comparaison : le cas KPP homogène

Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1 - u)$ avec $u_0 \in C_c^\infty$, $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors

- Pour tout $c > 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout $c < 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici $c^* = 2$ est la **vitesse de propagation**.

Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$ avec $f(u) = u(1 - u)$.
- $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$ donc

$$c_*(d) = 2\sqrt{df'(0)}$$

Élément de comparaison : le cas KPP homogène

Théorème-définition (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1 - u)$ avec $u_0 \in C_c^\infty$, $0 \leq u_0 \leq 1$, $u_0 \not\equiv 0$. Alors

- Pour tout $c > 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \geq ct} u(t, x) = 0$
- Pour tout $c < 2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{|x| \leq ct} u(t, x) = 1$

Ici $c^* = 2$ est la **vitesse de propagation**.

Remarques

- $2 = 2\sqrt{f'(0)}$ avec $f(u) = u(1 - u)$.
- $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \Leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$ donc

$$c_*(d) = 2\sqrt{df'(0)}$$

- Quelle est l'influence de la ligne et de D sur la **vitesse de propagation** dans la direction e_1 dans notre modèle ?

1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

4 Perspectives

Retour au modèle : propagation Fisher-KPP

Théorème (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Si $f(v) = v(1 - v)$ il y a une vitesse d'invasion $c^*(D) > 0$ dans la direction e_1
t.q. :

- Si $D \leq 2d$, $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$.

Retour au modèle : propagation Fisher-KPP

Théorème (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Si $f(v) = v(1 - v)$ il y a une vitesse d'invasion $c^*(D) > 0$ dans la direction e_1 t.q. :

- Si $D \leq 2d$, $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$.
- Si $D > 2d$, $c^* > c_{KPP}$ et $\frac{c^*(D)}{\sqrt{D}}$ a une limite finie quand $D \rightarrow +\infty$.

Retour au modèle : propagation Fisher-KPP

Théorème (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Si $f(v) = v(1 - v)$ il y a une vitesse d'invasion $c^*(D) > 0$ dans la direction e_1 t.q. :

- Si $D \leq 2d$, $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$.
- Si $D > 2d$, $c^* > c_{KPP}$ et $\frac{c^*(D)}{\sqrt{D}}$ a une limite finie quand $D \rightarrow +\infty$.

Remarques

On observe donc un phénomène d'accélération de la propagation dans la direction x dû à la diffusion sur la route.

Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'une non-linéarité plus générale ?
P. ex. un phénomène de seuil pourrait-il y faire obstruction

Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'une non-linéarité plus générale ?
P. ex. un phénomène de seuil pourrait-il y faire obstruction

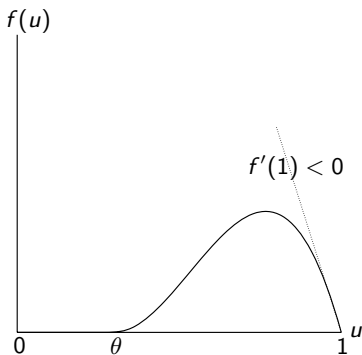


Figure: Exemple $f = \mathbf{1}_{u > \theta} (u - \theta)^2 (1 - u)$

C'est une question non triviale car :

- Fisher-KPP est très spécifique : le fait que f soit sous sa tangente à l'origine permet de calculer c^* quasi explicitement (tout se ramène à des équations algébriques).

C'est une question non triviale car :

- Fisher-KPP est très spécifique : le fait que f soit sous sa tangente à l'origine permet de calculer c^* quasi explicitement (tout se ramène à des équations algébriques).
- Cette condition pourrait être nécessaire pour obtenir l'accélération : p. ex

$$u_t + (-\Delta)^\alpha u = f(u)$$

propage les solutions initialement à support compact à vitesse exponentielle, mais pour une linéarité à seuil c'est faux, la propagation reste linéaire.

Angle d'attaque : les ondes progressives

- Simplification : se placer dans une bande avec condition de Neumann (une barrière). Légitime car on s'intéresse à la direction e_1 .

Angle d'attaque : les ondes progressives

- Simplification : se placer dans une bande avec condition de Neumann (une barrière). Légitime car on s'intéresse à la direction e_1 .
- La notion de vitesse d'invasion cache une dynamique non-triviale : celle des ondes progressives. Peut-on aller les chercher ici ? Et leur vitesse ?

Angle d'attaque : les ondes progressives

- Simplification : se placer dans une bande avec condition de Neumann (une barrière). Légitime car on s'intéresse à la direction e_1 .
- La notion de vitesse d'invasion cache une dynamique non-triviale : celle des ondes progressives. Peut-on aller les chercher ici ? Et leur vitesse ?

Ondes progressives dans la bande : solutions de la forme

$$c > 0, u(t, x) = \phi(x + ct), v(t, x, y) = \psi(x + ct, y)$$

$$\begin{array}{ccc}
 0 \leftarrow \phi & -D\phi'' + c\phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi & \phi \rightarrow 1/\mu \\
 \hline
 & d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x, 0) &
 \end{array}$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0 \qquad (1)$$

avec limites uniformes.

Résultats

Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe (c, ϕ, ψ) une solution de (1).

Résultats

Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe (c, ϕ, ψ) une solution de (1).
- $0 < \phi < \frac{1}{\mu}$, $0 < \psi < 1$, et $\partial_x \phi, \partial_x \psi > 0$.

Résultats

Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe (c, ϕ, ψ) une solution de (1).
- $0 < \phi < \frac{1}{\mu}$, $0 < \psi < 1$, et $\partial_x \phi, \partial_x \psi > 0$.
- Si $(\underline{c}, \bar{\phi}, \bar{\psi})$ est solution de (1), $\underline{c} = c$ et il existe $r \in \mathbb{R}$ t.q. $\bar{\phi}(\cdot + r) = \phi(\cdot)$ et $\bar{\psi}(\cdot + r) = \psi(\cdot)$.

Théorème 2. (D., 2013) : $D \rightarrow +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$ avec $c_\infty > 0$ qui dépend de L, μ, d et f .

Théorème 2. (D., 2013) : $D \rightarrow +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$ avec $c_\infty > 0$ qui dépend de L, μ, d et f .
- De plus, il existe une onde progressive unique à translation près de vitesse c_∞ au modèle renormalisé limite ($x \leftarrow x\sqrt{D}$ et $c \leftarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$) quand $D \rightarrow +\infty$:

Théorème 2. (D., 2013) : $D \rightarrow +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$ avec $c_\infty > 0$ qui dépend de L, μ, d et f .
- De plus, il existe une onde progressive unique à translation près de vitesse c_∞ au modèle renormalisé limite ($x \leftarrow x\sqrt{D}$ et $c \leftarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$) quand $D \rightarrow +\infty$:

$$0 \leftarrow \phi \qquad -\phi'' + \mathbf{c}\phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi \qquad \phi \rightarrow 1/\mu$$

$$d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x, 0)$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad \mathbf{c}\partial_x\psi - \frac{d}{D}\partial_{xx}\psi - d\partial_{yy}\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

(2)

Théorème 2. (D., 2013) : $D \rightarrow +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$ avec $c_\infty > 0$ qui dépend de L, μ, d et f .
- De plus, il existe une onde progressive unique à translation près de vitesse c_∞ au modèle renormalisé limite ($x \leftarrow x\sqrt{D}$ et $c \leftarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$) quand $D \rightarrow +\infty$:

$$0 \leftarrow \phi \qquad -\phi'' + c_\infty \phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi \qquad \phi \rightarrow 1/\mu$$

$$d\partial_y \psi = \mu\phi - \psi(x, 0)$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad c_\infty \partial_x \psi - d\partial_{yy} \psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y \psi = 0$$

(2)

Remarque

- Malgré la diffusion singulière, le modèle limite est bien posé en soi : on peut montrer l'existence et la régularité des ondes progressives à $D = +\infty$ par une méthode directe sans passer par la régularisation $-\frac{d}{D}\partial_{xx}$.

Remarque

- Malgré la diffusion singulière, le modèle limite est bien posé en soi : on peut montrer l'existence et la régularité des ondes progressives à $D = +\infty$ par une méthode directe sans passer par la régularisation $-\frac{d}{D}\partial_{xx}$.
- On a donc une régularisation en x due à l'effet de la route et au terme $c\partial_x v$: résultat à rapprocher de la régularité dans les équations cinétiques.

Remarque

- Malgré la diffusion singulière, le modèle limite est bien posé en soi : on peut montrer l'existence et la régularité des ondes progressives à $D = +\infty$ par une méthode directe sans passer par la régularisation $-\frac{d}{D}\partial_{xx}$.
- On a donc une régularisation en x due à l'effet de la route et au terme $c\partial_x v$: résultat à rapprocher de la régularité dans les équations cinétiques.
- À $c = 0$ on montre qu'il n'existe que des solutions discontinues en x : le terme $c\partial_x v$ est donc nécessaire.

1 Influence d'une ligne de diffusion rapide

- Le modèle
- Questions

2 Le cadre

- Réaction-diffusion ?
- Propagation dans les équations homogènes

3 Retour au modèle

- Le cas Fisher-KPP
- Avec une non-linéarité à seuil ?
- Résultats

4 Perspectives

Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si $|\{v_0 > \theta\}|$ assez grand (en fonction de d) alors

Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si $|\{v_0 > \theta\}|$ assez grand (en fonction de d) alors
 - 1) Formation d'un front de vitesse $c(d)$ dans la bande, et dispersion immédiate sur la route ($u \simeq 0$).

Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si $|\{v_0 > \theta\}|$ assez grand (en fonction de d) alors
 - 1) Formation d'un front de vitesse $c(d)$ dans la bande, et dispersion immédiate sur la route ($u \simeq 0$).
 - 2) Une fois une taille critique (fonction de D) atteinte dans la bande, transition : après réception de la masse, la route se met à guider.

Perspectives

- Pour boucler l'étude : étudier le problème de Cauchy partant d'une solution à support compact.
- Scénario attendu : si $|\{v_0 > \theta\}|$ assez grand (en fonction de d) alors
 - 1) Formation d'un front de vitesse $c(d)$ dans la bande, et dispersion immédiate sur la route ($u \simeq 0$).
 - 2) Une fois une taille critique (fonction de D) atteinte dans la bande, transition : après réception de la masse, la route se met à guider.
 - 3) Accélération vers un front de vitesse $c(D)$.



Merci pour votre attention !

Stratégie de preuve : existence

Continuation jusqu'à

$$-d\psi'' + c\psi' = f(\psi), \quad \psi(-\infty) = 0, \psi(+\infty) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \leftarrow \phi & -D\phi'' + c\phi' = \psi(x, 0) - \mu\phi & \phi \rightarrow 1/\mu \\ \hline & d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x, 0) & \end{array}$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Stratégie de preuve : existence

Continuation jusqu'à

$$-d\psi'' + c\psi' = f(\psi), \quad \psi(-\infty) = 0, \psi(+\infty) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \leftarrow \phi & -D\phi'' + c\phi' = (\psi(x, 0) - \mu\phi)/\varepsilon & \phi \rightarrow 1/\mu \\ \hline & d\partial_y\psi = (\mu\phi - \psi(x, 0))/\varepsilon & \end{array}$$

$$0 \leftarrow \psi \quad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \quad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Étape 1 : forcer $\mu\phi = \psi$ sur la route avec ε , paramètre dans $(0, 1)$.

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi = \frac{D}{\mu}\partial_{xx}\psi - \frac{c}{\mu}\partial_x\psi$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi = \frac{sD}{\mu}\partial_{xx}\psi - \frac{c}{\mu}\partial_x\psi$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Étape 2 : varier D avec $s \in (0, 1)$.

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi + \frac{\varepsilon}{\mu}\partial_x\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Interprétation : ψ sur la route s'ajuste à ψ dans le champ avec un délai

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi + \frac{ct}{\mu}\partial_x\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Interprétation : ψ sur la route s'ajuste à ψ dans le champ avec un délai

Étape 3 : varier $\frac{1}{\mu}$ avec $t \in (0, 1)$.

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Interprétation : la route devient une cloture

Stratégie de preuve : existence

$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi$$

$$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$

$$\psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Interprétation : la route devient une cloture

Théorème : Kanel '69, Berestycki-Nirenberg '90

Ce problème a une unique solution, l'onde plane.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.
 - Fermeture : estimées a priori, bornes sur c , estimées et solutions exponentielles.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.
 - Fermeture : estimées a priori, bornes sur c , estimées et solutions exponentielles.
 - Ouverture : repose sur une version plus ou moins sophistiquée du théorème des fonctions implicites dans un Hölder à poids.

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.
 - Fermeture : estimées a priori, bornes sur c , estimées et solutions exponentielles.
 - Ouverture : repose sur une version plus ou moins sophistiquée du théorème des fonctions implicites dans un Hölder à poids.
- Le cas $\varepsilon \simeq 0$ est une perturbation singulière et est traité à part.

Limite de grande diffusion

- Renormaliser $x \leftrightarrow \sqrt{D}x$ et $c \leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$.

Limite de grande diffusion

- Renormaliser $x \leftrightarrow \sqrt{D}x$ et $c \leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$.
- Obtention d'une estimée originale : module de continuité uniforme sur les ψ_n sur $J_n \times [-L, 0]$ où J_n est un borélien de $[-1, 1]$ de mesure ≥ 1 ;
itération via des identités à la Gagliardo-Nirenberg \rightarrow compacité.

Limite de grande diffusion

- Renormaliser $x \leftrightarrow \sqrt{D}x$ et $c \leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{D}}$.
- Obtention d'une estimée originale : module de continuité uniforme sur les ψ_n sur $J_n \times [-L, 0]$ où J_n est un borélien de $[-1, 1]$ de mesure ≥ 1 ;
itération via des identités à la Gagliardo-Nirenberg \rightarrow compacité.
- Adapter les résultats d'unicité de vitesse au cas limite : voir x comme le temps et le problème comme elliptique-parabolique.