Accélération de fronts de réaction-diffusion par une ligne de diffusion rapide.

Laurent Dietrich
Dir. H. Berestycki et J.-M. Roquejoffre

Institut de mathématiques de Toulouse

Rencontres du 3ème cycle – Bordeaux – 3 avril 2013

Cadre : équations de réaction-diffusion

- Éqs de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(u) \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

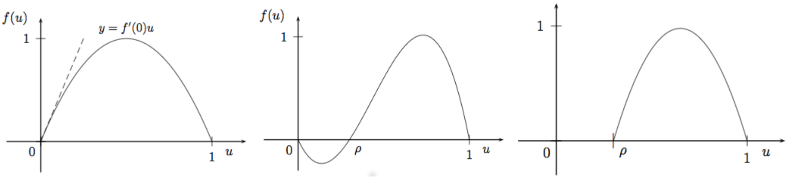
A opérateur de diffusion (penser $A = -\Delta$), f non-linéarité (réaction, ex. : monostable, bistable, ignition) :

Cadre : équations de réaction-diffusion

- Éqs de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(u) \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

A opérateur de diffusion (penser $A = -\Delta$), f non-linéarité (réaction, ex. : monostable, bistable, ignition) :

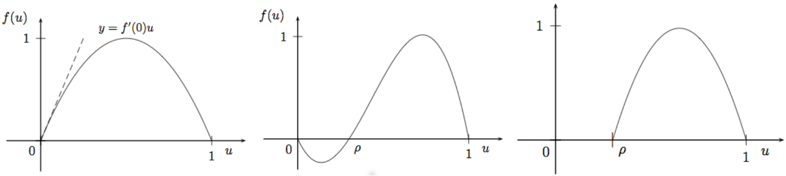


Cadre : équations de réaction-diffusion

- Éqs de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(u) \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

A opérateur de diffusion (penser $A = -\Delta$), f non-linéarité (réaction, ex. : monostable, bistable, ignition) :



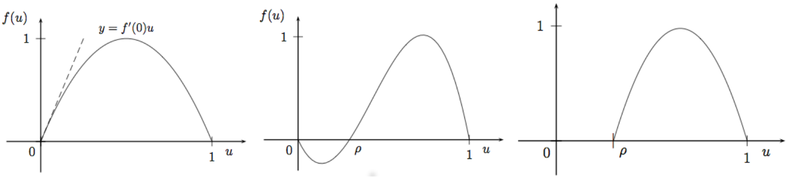
- Modélise : écologie (dynamique des populations), réactions chimiques, combustion ...

Cadre : équations de réaction-diffusion

- Éqs de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(u) \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

A opérateur de diffusion (penser $A = -\Delta$), f non-linéarité (réaction, ex. : monostable, bistable, ignition) :



- Modélise : écologie (dynamique des populations), réactions chimiques, combustion ...
- $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ représente typiquement : densités de population, concentrations de réactifs, température ...

Quelques exemples

- Exemple scalaire : $\partial_t u - d\Delta u = f(u)$ avec f de type KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov), bistable ou ignition

Quelques exemples

- Exemple scalaire : $\partial_t u - d\Delta u = f(u)$ avec f de type KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov), bistable ou ignition
- Systèmes d'interaction (selon les signes de c_{ij})

$$\partial_t u_i - D_i \Delta u_i + \nabla \cdot (c_i u_i) = u_i \left(r_i + \sum_{j=1}^{I} c_{ij} u_j \right)$$

Quelques exemples

- Exemple scalaire : $\partial_t u - d\Delta u = f(u)$ avec f de type KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov), bistable ou ignition
- Systèmes d'interaction (selon les signes de c_{ij})

$$\partial_t u_i - D_i \Delta u_i + \nabla \cdot (c_i u_i) = u_i \left(r_i + \sum_{j=1}^{I} c_{ij} u_j \right)$$

- Système de combustion (dans un cylindre $(x, y) \in \mathbb{R} \times \Sigma^{N-1}$)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \alpha(y)\partial_x u = vf(u) \\ \partial_t v - \frac{\Delta v}{Le} + \alpha(y)\partial_x v = -vf(u) \end{cases}$$

Quelques exemples

- Exemple scalaire : $\partial_t u - d\Delta u = f(u)$ avec f de type KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov), bistable ou ignition
- Systèmes d'interaction (selon les signes de c_{ij})

$$\partial_t u_i - D_i \Delta u_i + \nabla \cdot (c_i u_i) = u_i \left(r_i + \sum_{j=1}^{I} c_{ij} u_j \right)$$

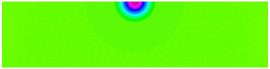
- Système de combustion (dans un cylindre $(x,y) \in \mathbb{R} \times \Sigma^{N-1}$)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \alpha(y)\partial_x u = vf(u) \\ \partial_t v - \frac{\Delta v}{Le} + \alpha(y)\partial_x v = -vf(u) \end{cases}$$

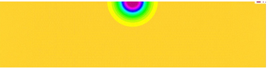
- Opérateurs non locaux : $A = (-\Delta)^{\alpha}$ (sauts), interactions non locales ...

Heuristique

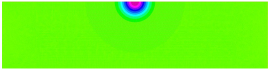
- Compétition/interaction entre la dispersion... :



- ... et la réaction



Équilibres non triviaux entre les états stationnaires 0 et 1 ?



Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t, x-ct)$

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t, x-ct)$ satisfait $v_t - v_{xx} + cv_x = v(1-v)$.

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t, x-ct)$ satisfait $v_t - v_{xx} + cv_x = v(1-v)$.
  Si $|c| < 2$, $\exists$ sol. de $-\phi_\delta'' + c\phi_\delta' = (1-\delta)\phi_\delta$ en forme d'arche sur $[-a_\delta, a_\delta]$ et sous $v(1,\cdot)$ ... et

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t,x-ct)$ satisfait $v_t - v_{xx} + cv_x = v(1-v)$.
  Si $|c| < 2$, $\exists$ sol. de $-\phi_\delta'' + c\phi_\delta' = (1-\delta)\phi_\delta$ en forme d'arche sur $[-a_\delta, a_\delta]$ et sous $v(1,\cdot)$ ... et

$$-\partial_{xx}(\varepsilon\phi_\delta) + c\partial_x(\varepsilon\phi_\delta) - \varepsilon\phi_\delta + (\varepsilon\phi_\delta)^2 = \varepsilon(-\delta\phi_\delta + \varepsilon\phi_\delta^2) \leq 0$$

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t, x-ct)$ satisfait $v_t - v_{xx} + cv_x = v(1-v)$.
  Si $|c| < 2$, $\exists$ sol. de $-\phi_\delta'' + c\phi_\delta' = (1-\delta)\phi_\delta$ en forme d'arche sur $[-a_\delta, a_\delta]$ et sous $v(1,\cdot)$ ... et

$$-\partial_{xx}(\varepsilon\phi_\delta) + c\partial_x(\varepsilon\phi_\delta) - \varepsilon\phi_\delta + (\varepsilon\phi_\delta)^2 = \varepsilon(-\delta\phi_\delta + \varepsilon\phi_\delta^2) \leq 0$$

En dim. supérieure : multiplier par la 1ere fonction propre du laplacien sur B_R.

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t,x-ct)$ satisfait $v_t - v_{xx} + cv_x = v(1-v)$.
  Si $|c| < 2$, $\exists$ sol. de $-\phi_\delta'' + c\phi_\delta' = (1-\delta)\phi_\delta$ en forme d'arche sur $[-a_\delta, a_\delta]$ et sous $v(1,\cdot)$ ... et

$$-\partial_{xx}(\varepsilon\phi_\delta) + c\partial_x(\varepsilon\phi_\delta) - \varepsilon\phi_\delta + (\varepsilon\phi_\delta)^2 = \varepsilon(-\delta\phi_\delta + \varepsilon\phi_\delta^2) \leq 0$$

En dim. supérieure : multiplier par la 1ere fonction propre du laplacien sur B_R.
Pourquoi 2 ?

Théorème (Aronson-Weinberger 1975)

Soit $u_t - \Delta u = u(1-u)$ avec $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty$ t.q. $0 \leq u_0 \leq 1$ et $u_0 \not\equiv 0$. Il existe une vitesse de propagation $c^* = 2$ t.q.

- Pour tout $|c| > c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \sup_{|x|\geq ct} u(t,x) = 0$
- Pour tout $|c| < c^*$, $\lim_{t\to+\infty} \inf_{|x|\leq ct} u(t,x) = 1$

Idée en dim. 1 :

- $u(t,x) \leq \frac{e^t}{(4\pi t)^{1/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$
- $v(t,x) := u(t, x-ct)$ satisfait $v_t - v_{xx} + cv_x = v(1-v)$.
  Si $|c| < 2$, $\exists$ sol. de $-\phi_\delta'' + c\phi_\delta' = (1-\delta)\phi_\delta$ en forme d'arche sur $[-a_\delta, a_\delta]$ et sous $v(1,\cdot)$ ... et

$$-\partial_{xx}(\varepsilon\phi_\delta) + c\partial_x(\varepsilon\phi_\delta) - \varepsilon\phi_\delta + (\varepsilon\phi_\delta)^2 = \varepsilon(-\delta\phi_\delta + \varepsilon\phi_\delta^2) \leq 0$$

En dim. supérieure : multiplier par la 1ere fonction propre du laplacien sur B_R.
Pourquoi 2 ? Réponse : $2 = 2\sqrt{f'(0)}$ avec $f(u) = u(1-u)$.

Dynamique non triviale : les ondes progressives

En fait : solutions particulières de l'éq. de Fisher-KPP, les ondes progressives (c, ϕ) où $u(t, x) = \phi(x - ct)$

Dynamique non triviale : les ondes progressives

En fait : solutions particulières de l'éq. de Fisher-KPP, les ondes progressives (c, ϕ) où $u(t, x) = \phi(x - ct)$

Théorème (Fisher-KPP 1937)

Pour tout $c \geq c^*$, il existe un profil ϕ croissant qui relie 0 à 1, unique à translation près, solution de $-\phi'' + c\phi' = f(\phi)$.

Dynamique non triviale : les ondes progressives

En fait : solutions particulières de l'éq. de Fisher-KPP, les ondes progressives (c, ϕ) où $u(t,x) = \phi(x - ct)$

Théorème (Fisher-KPP 1937)

Pour tout $c \geq c^*$, il existe un profil ϕ croissant qui relie 0 à 1, unique à translation près, solution de $-\phi'' + c\phi' = f(\phi)$. De plus, la solution de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u(1-u) \\ u(0,\cdot) = H(x) \end{cases}$$

converge en temps long vers $\phi(x - c^*t - m(t))$ avec $m(t) = Cln(t) + o(1)$ uniformément en x.

Remarques

- Kolmogorov, Petrovski et Piskunov avaient observé cette dynamique non triviale en dim. 1 dès 1937 dans un article fondateur.

Remarques

- Kolmogorov, Petrovski et Piskunov avaient observé cette dynamique non triviale en dim. 1 dès 1937 dans un article fondateur.
- Il existe un continuum de vitesses pour les fronts, mais c'est la minimale qui est séléctionnée ici.

Remarques

- Kolmogorov, Petrovski et Piskunov avaient observé cette dynamique non triviale en dim. 1 dès 1937 dans un article fondateur.
- Il existe un continuum de vitesses pour les fronts, mais c'est la minimale qui est séléctionnée ici.
- $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$. $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \Leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$ donc

Remarques

- Kolmogorov, Petrovski et Piskunov avaient observé cette dynamique non triviale en dim. 1 dès 1937 dans un article fondateur.
- Il existe un continuum de vitesses pour les fronts, mais c'est la minimale qui est séléctionnée ici.
- $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$. $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \Leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$ donc

$$c_*(d) = 2\sqrt{\mathbf{d}f'(0)}$$

Remarques

- Kolmogorov, Petrovski et Piskunov avaient observé cette dynamique non triviale en dim. 1 dès 1937 dans un article fondateur.
- Il existe un continuum de vitesses pour les fronts, mais c'est la minimale qui est séléctionnée ici.
- $c_* = 2\sqrt{f'(0)}$. $u_{xx} \leftrightarrow du_{xx} \Leftrightarrow x \leftrightarrow \sqrt{d}x$ donc

$$c_*(d) = 2\sqrt{\mathbf{d}f'(0)}$$

- En fait dans Aronson-Weinberger, on peut montrer que la solution développe deux tels fronts partant dans les deux sens (cf. vidéo) et converge vers leur somme exponentiellement vite en temps.

Généralisations

- Avec f de type bistable ou ignition, il n'existe qu'une vitesse pour les fronts.

Généralisations

- Avec f de type bistable ou ignition, il n'existe qu'une vitesse pour les fronts.
- Fife-McLeod (1977) donnent un analogue à Aronson-Weinberger modulo le fait que u_0 soit assez grand sur un assez grand support (0 est stable, il faut compenser) mais il est plus profond : dans ces cas la dynamique est vraiment dictée par les fronts.

Généralisations

- Avec f de type bistable ou ignition, il n'existe qu'une vitesse pour les fronts.
- Fife-McLeod (1977) donnent un analogue à Aronson-Weinberger modulo le fait que u_0 soit assez grand sur un assez grand support (0 est stable, il faut compenser) mais il est plus profond : dans ces cas la dynamique est vraiment dictée par les fronts.
- Le théorème de KPP 1937 reste vrai, sans le shift logarithmique.

Généralisations

- Avec f de type bistable ou ignition, il n'existe qu'une vitesse pour les fronts.
- Fife-McLeod (1977) donnent un analogue à Aronson-Weinberger modulo le fait que u_0 soit assez grand sur un assez grand support (0 est stable, il faut compenser) mais il est plus profond : dans ces cas la dynamique est vraiment dictée par les fronts.
- Le théorème de KPP 1937 reste vrai, sans le shift logarithmique.
- Plein de choses fines étudiées et à étudier sur la dynamique.

Généralisations

- Avec f de type bistable ou ignition, il n'existe qu'une vitesse pour les fronts.
- Fife-McLeod (1977) donnent un analogue à Aronson-Weinberger modulo le fait que u_0 soit assez grand sur un assez grand support (0 est stable, il faut compenser) mais il est plus profond : dans ces cas la dynamique est vraiment dictée par les fronts.
- Le théorème de KPP 1937 reste vrai, sans le shift logarithmique.
- Plein de choses fines étudiées et à étudier sur la dynamique.
- Hétérogénéités ?

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi :

$$\partial_t u - D\partial_{xx}^2 u = v(t,x,0) - \mu u$$

$$d\partial_y v = \mu u - v$$

$$\partial_t v - d\Delta v = f(v)$$

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi :

$$\frac{\partial_t u - D\partial_{xx}^2 u = v(t,x,0) - \mu u}{d\partial_y v = \mu u - v}$$

$$\partial_t v - d\Delta v = f(v)$$

- Système monotone : on a un principe de comparaison.

- Modèle proposé par Berestycki, Roquejoffre, Rossi :

$$\frac{\partial_t u - D\partial_{xx}^2 u = v(t,x,0) - \mu u}{d\partial_y v = \mu u - v}$$

$$\partial_t v - d\Delta v = f(v)$$

- Système monotone : on a un principe de comparaison.
- Motivation écologique : les réseaux de transports augmentent la vitesse des invasions biologiques et sociales (Siegfried).

- Ex. 1 : épidémies. La peste de 1347 diffusait rapidement sur les axes commerciaux.

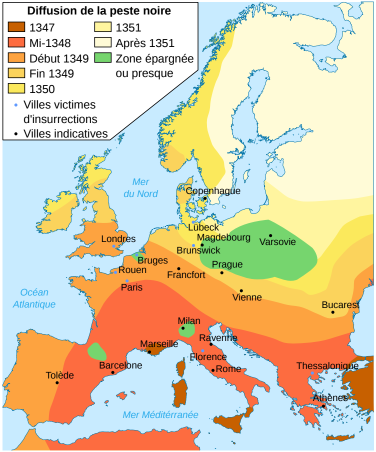


Figure: Source : Wikipédia

- Ex. 2 : la chenille processionnaire du pin. Va vers le Nord à cause du réchauffement global, mais on pense que les routes jouent un rôle (cf. périphérique parisien).

Figure: Chenille processionaire (Auray, Bretagne). Source : Wikipédia

Propagation Fisher-KPP

Theorem (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Il y a une vitesse d'invasion $c^*(D) > 0$ dans la direction e_1 t.q. :

- Si $D \leq 2d$, $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$.

Propagation Fisher-KPP

Theorem (Berestycki, Roquejoffre, Rossi 2012)

Il y a une vitesse d'invasion $c^*(D) > 0$ dans la direction e_1 t.q. :

- Si $D \leq 2d$, $c^* = c_{KPP} = 2\sqrt{df'(0)}$.
- Si $D > 2d$, $c^* > c_{KPP}$ et $\frac{c^*(D)}{\sqrt{D}}$ a une limite finie quand $D \to +\infty$.

Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'un phénomène de seuil ?

Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'un phénomène de seuil ?

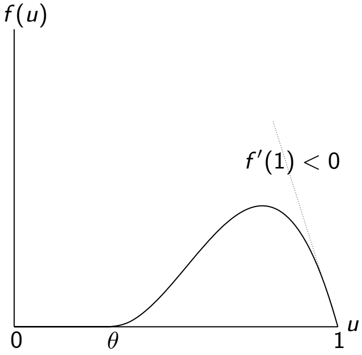


Figure: Example $f = \mathbf{1}_{u>\theta}(u-\theta)^2(1-u)$

Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'un phénomène de seuil ?

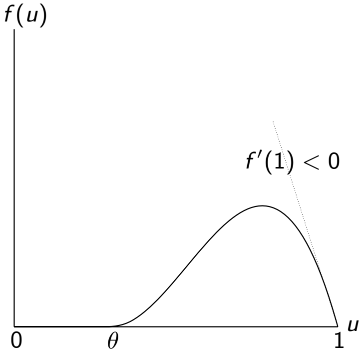


Figure: Example $f = \mathbf{1}_{u>\theta}(u-\theta)^2(1-u)$

Non trivial : f concave rend Fisher-KPP très spécifique : on peut quasiment obtenir c^* explicitement.

Question

Cette accélération persiste-t-elle en présence d'un phénomène de seuil ?

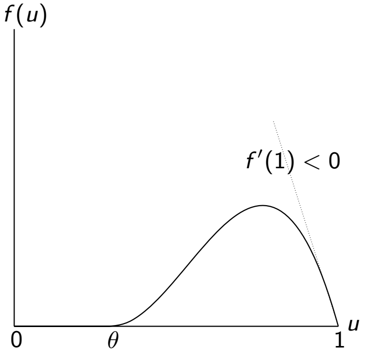


Figure: Example $f = \mathbf{1}_{u>\theta}(u-\theta)^2(1-u)$

Non trivial : f concave rend Fisher-KPP très spécifique : on peut quasiment obtenir c^* explicitement.
Réponse à travers les ondes progressives : oui.

Ondes progressives dans une bande

$c > 0, u(t,x) = \phi(x+ct), v(t,x,y) = \psi(x+ct,y)$

Ondes progressives dans une bande

$c > 0,\ u(t,x) = \phi(x+ct),\ v(t,x,y) = \psi(x+ct,y)$

$$0 \leftarrow \phi \qquad -D\phi'' + c\phi' = \psi(x,0) - \mu\phi \qquad \phi \rightarrow 1/\mu$$

$$d\partial_y\psi = \mu\phi - \psi(x,0)$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0 \tag{1}$$

avec limites uniformes.

Résultats

Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe (c, ϕ, ψ) une solution de (1) obtenue par homotopie à partir de l'équation de combustion 1D classique $-d\psi_0'' + c_0\psi_0' = f(\psi_0)$.

Résultats

Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe (c, ϕ, ψ) une solution de (1) obtenue par homotopie à partir de l'équation de combustion 1D classique $-d\psi_0'' + c_0\psi_0' = f(\psi_0)$.
- $0 < \phi < \frac{1}{\mu}$, $0 < \psi < 1$, et $\partial_x\phi, \partial_x\psi > 0$.

Résultats

Théorème 1 (D., 2013) : existence d'ondes progressives

- Il existe (c, ϕ, ψ) une solution de (1) obtenue par homotopie à partir de l'équation de combustion 1D classique $-d\psi_0'' + c_0\psi_0' = f(\psi_0)$.
- $0 < \phi < \frac{1}{\mu}$, $0 < \psi < 1$, et $\partial_x\phi, \partial_x\psi > 0$.
- Si $(\underline{c}, \overline{\phi}, \overline{\psi})$ est solution de (1), $\underline{c} = c$ et il existe $r \in \mathbb{R}$ t.q. $\overline{\phi}(\cdot + r) = \phi(\cdot)$ et $\overline{\psi}(\cdot + r) = \psi(\cdot)$.

Théorème 2. (D., 2013) : $D \to +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$ avec $c_\infty > 0$ qui dépend de L, μ, d et f.
- De plus, il existe une onde progressive (unique à translation près) de vitesse c_∞ au modèle limite (rescalé) avec $D = +\infty$:

Théorème 2. (D., 2013) : $D \to +\infty$

- La vitesse de l'onde progressive précédente vérifie $c(D) \sim c_\infty \sqrt{D}$ avec $c_\infty > 0$ qui dépend de L, μ, d et f.
- De plus, il existe une onde progressive (unique à translation près) de vitesse c_∞ au modèle limite (rescalé) avec $D = +\infty$:

$$0 \leftarrow \phi \qquad -\phi'' + c\phi' = \psi(x,0) - \mu\phi \qquad \phi \to 1/\mu$$

$$d\partial_y \psi = \mu\phi - \psi(x,0)$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad c\partial_x \psi - d\partial_{yy}\psi = f(\psi) \qquad \psi \to 1$$

$$\partial_y \psi = 0 \tag{2}$$

Stratégie de preuve

Continuation jusqu'à

$$-d\psi'' + c\psi' = f(\psi),\ \psi(-\infty) = 0, \psi(+\infty) = 1$$

$0 \leftarrow \phi$ $\qquad -D\phi'' + c\phi' = \psi(x,0) - \mu\phi$ $\qquad \phi \to 1/\mu$

$$d\partial_y \psi = \mu\phi - \psi(x,0)$$

$0 \leftarrow \psi$ $\qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$ $\qquad \psi \to 1$

$$\partial_y \psi = 0$$

Stratégie de preuve

Continuation jusqu'à

$$-d\psi'' + c\psi' = f(\psi),\ \psi(-\infty) = 0, \psi(+\infty) = 1$$

$0 \leftarrow \phi$ $\quad -D\phi'' + c\phi' = (\psi(x,0) - \mu\phi)/\varepsilon \quad$ $\phi \to 1/\mu$

$$d\partial_y\psi = (\mu\phi - \psi(x,0))/\varepsilon$$

$0 \leftarrow \psi$ $\quad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \quad$ $\psi \to 1$

$$\partial_y\psi = 0$$

Étape 1 : forcer $\phi = \psi$ sur la route avec ε, paramètre dans $(0,1)$.

Stratégie de preuve

$$d\partial_y \psi = \frac{D}{\mu}\partial_{xx}\psi - \frac{c}{\mu}\partial_x \psi$$

$0 \leftarrow \psi$ $$-d\Delta\psi + c\partial_x \psi = f(\psi)$$ $\psi \to 1$

$$\partial_y \psi = 0$$

Stratégie de preuve

$$d\partial_y \psi = \frac{sD}{\mu}\partial_{xx}\psi - \frac{c}{\mu}\partial_x \psi$$

$0 \leftarrow \psi$ $$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$ $\psi \to 1$

$$\partial_y \psi = 0$$

Étape 2 : varier D avec $s \in (0,1)$.

Stratégie de preuve

$$d\partial_y\psi + \tfrac{c}{\mu}\partial_x\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Interprétation : ψ sur la route s'ajuste à ψ dans le champ avec un délai

Stratégie de preuve

$$d\partial_y\psi + \frac{ct}{\mu}\partial_x\psi = 0$$

$0 \leftarrow \psi$ $$-d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi)$$ $\psi \rightarrow 1$

$$\partial_y\psi = 0$$

Interprétation : ψ sur la route s'ajuste à ψ dans le champ avec un délai

Étape 3 : varier $\frac{1}{\mu}$ avec $t \in (0,1)$.

Stratégie de preuve

$$d\partial_y\psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \to 1$$

$$\partial_y\psi = 0$$

Stratégie de preuve

$$d\partial_y \psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x\psi = f(\psi) \qquad \psi \rightarrow 1$$

$$\partial_y \psi = 0$$

Interprétation : la route devient une cloture

Stratégie de preuve

$$d\partial_y \psi = 0$$

$$0 \leftarrow \psi \qquad -d\Delta\psi + c\partial_x \psi = f(\psi) \qquad \psi \to 1$$

$$\partial_y \psi = 0$$

Interprétation : la route devient une cloture

Théorème : Kanel '69, Berestycki-Nirenberg '90

Ce problème a une unique solution, l'onde plane.

Idées

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.

Idées

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.

Idées

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.
    - Fermeture : estimées a priori, bornes sur c, estimées et solutions exponentielles.

Idées

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.
  - Fermeture : estimées a priori, bornes sur c, estimées et solutions exponentielles.
  - Ouverture : repose sur une version plus ou moins sophistiquée du théorème des fonctions implicites dans un Hölder à poids.

Idées

- Aller de l'étape 3 à l'étape 1.
- Pour chaque étape, montrer que l'ens. des paramètres pour lesquels l'éq. a une solution est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.
  - Fermeture : estimées a priori, bornes sur c, estimées et solutions exponentielles.
  - Ouverture : repose sur une version plus ou moins sophistiquée du théorème des fonctions implicites dans un Hölder à poids.
- Le cas $\varepsilon \simeq 0$ est une perturbation singulière et est traité à part.

Perspectives

- À court terme : montrer l'existence de l'onde progressive au modèle limite par une méthode directe (sans la "régularisation" en x).

Perspectives

- À court terme : montrer l'existence de l'onde progressive au modèle limite par une méthode directe (sans la "régularisation" en x).
- À moyen terme : montrer la convergence des données initiales à support compact suffisamment grand vers une paire de telles ondes, **uniformément en D.**

Merci pour votre attention !