trop loin de la solution (u_n p.ex n'est pas trop loin de u_{n+1} on espère !) 9

alors la suite x_n converge vers la solution, et la précision est doublée à chaque itération !!!

$$|x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^2 \quad \text{le 2 de quadratique}$$

la preuve en dimension 1 est classique. En dim n, cf [Quarteroni], pas très compliqué ! Et instructif.

En pratique, surtout ne pas inverser DN mais juste résoudre le système $DN(x_n)\,qqch = N(x_n)$, dans Matlab :

$$x_{n+1} = x_n - DN(x_n) \backslash N(x_n).$$

Bien sûr, $N(x)$ désignait partout

$$N(x) = x - u_n - h f(t_{n+1}, x)$$

et donc $DN(x) = Id - hD f(t_{n+1}, x)$

qui est inversible dès lors que h est assez petit par ouverture de $GL_n(\mathbb{R})$...

Annexe : ⚠ au "piège" si on vous demande d'écrire Euler implicite avec un ϕ... Il faudrait écrire $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ comme une fct $\phi(t_n, h, u_n)$?

L'astuce est la suivante

$$f(t_{n+1}, u_{n+1}) = f(t_n + h, \underbrace{\text{solution de } x = u_n + hf(t_n+h, x)})$$

appliquer le théorème des fonctions implicites à cette chose, pour dire que c'est une fonction, $\mathcal{C}^1$, de u_n, h et t_n.

Par caractère $\mathcal{C}^1$ composé, on aura la stabilité...

⇝ Mieux vaut faire ça à la main !

CONSISTENCE : DL à l'envers. STABILITÉ : calculer, voir que $h < \frac{1}{2L}$ permet d'appliquer Gronwall discret