**Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III)** **Année universitaire**
**Département de mathématiques – M1 MAF** **2012-2013**
**Modélisation en EDO, EDP, optimisation**

**Laurent Dietrich**

# TP – Équations de Lotka-Volterra (2)

Il est recommandé de créer un nouveau répertoire dans lequel seront placés les fichiers relatifs à ce TP afin de ne pas mélanger, ou pire, écraser, d'anciens fichiers. Il est chaudement recommandé de taper **help** quelquechose dans l'invite de commande de Matlab, lorsque vous voulez des renseignements sur la commande quelquechose et/ou de m'interpeller. Il est aussi chaudement recommandé de ne pas aller recopier du code d'un ancien TP afin d'éviter de recopier au pire des erreurs, au mieux quelque chose dont le code n'aura pas la même structure qu'ici, ce qui vous fera perdre du temps, et de l'entraînement.

## 1 Rappel du modèle, premières illustrations

On rappelle le modèle de Lotka-Volterra, pour $a, b, c, d > 0$ des réels

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \\ x(0) = x_0 \geq 0, y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

1. Réécrire ce système d'équations sous la forme $u' = f(u)$.
2. Écrire sommairement le principe de la méthode d'Euler explicite, appliquée dans ce cadre.
3. Interpréter géométriquement la méthode d'Euler explicite en termes du champ de vecteurs $f$.
4. Pour étayer la question précédente, on se propose comme première illustration de tracer le champ de vecteurs $f$. Il s'agit donc de discrétiser l'ouvert sur lequel on travaille (sur quel ouvert travaille-t-on ?), et de tracer le vecteur correspondant sur chaque point de la discrétisation. Matlab peut prémâcher un tel travail grâce aux deux commandes : **meshgrid** qui retourne une grille quand on lui donne deux discrétisations en $x$ et en $y$, et **quiver** qui dessine le champ de vecteur qu'on lui donne sur la grille qu'on lui donne : essayez de comprendre le fonctionnement de ces deux fonctions en faisant appel à l'aide et en faisant quelques tests, puis proposez un tracé du champ.
5. Discutez du résultat ; proposez des conjectures sur l'allure des trajectoires.

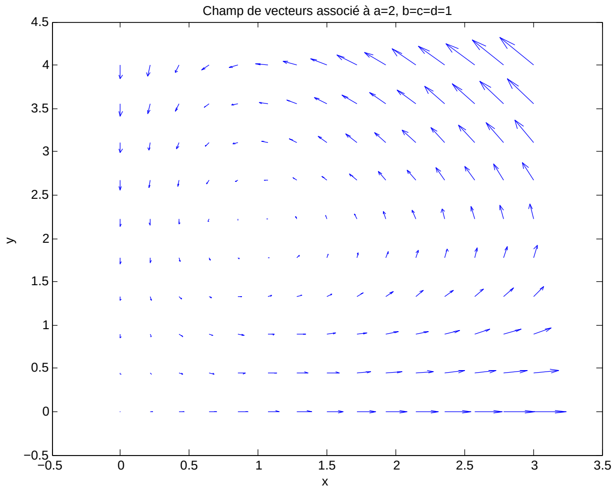


FIGURE 1 – Ce à quoi le champ de vecteurs doit ressembler

## 2 Implémentation des schémas numériques

1. Implémentez une fonction [t,u] = EulerE(u0,h,T) qui retourne la subdivision en temps et la solution approchée associée, calculée par la méthode d'Euler explicite, pour des valeurs de paramètres $u0, h, T$. Tracez une trajectoire dans le plan de phase. Repérez le point de départ, aussi à l'aide de **plot**. Tracez $x$ et $y$ en fonction de $t$ (on utilisera **plot**(t,x,t,y)). Discutez de vos précédentes conjectures.
2. Ré-itérez la question précédente, avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

## 3 Données

En écologie, la collecte de donnée est un problème compliqué. Néanmoins, et avec toutes les précautions que l'on peut prendre, on prendra en considération le graphe suivant ainsi que ce texte explicatif de Douglas R. Hundley
(http ://people.whitman.edu/ hundledr/)

> NOTE about the data : I have not been able to verify this data,but this is the data (or rather the graph) that is always cited. This particular set of data came from scanning in the graph from Odum's "Fundamentals of Ecology", p. 191 which is often cited. Odum says that his graph is taken from MacLulich's "Fluctuations in the numbers of varying hare", 1937, which is not widely available. Some authors caution that this data is actually a composition of several time series, and should probably not be analyzed as a whole, and that some of the lynx data was actually missing. It is said that the data was collected from Hudson's Bay historical records, and does not reflect animal

populations, but rather the number of pelts turned in for trading (a large number of which came from Native Americans-mentioned because there were some medical outbreaks during these years which could account for skewed data). The data is presented here with these cautions.

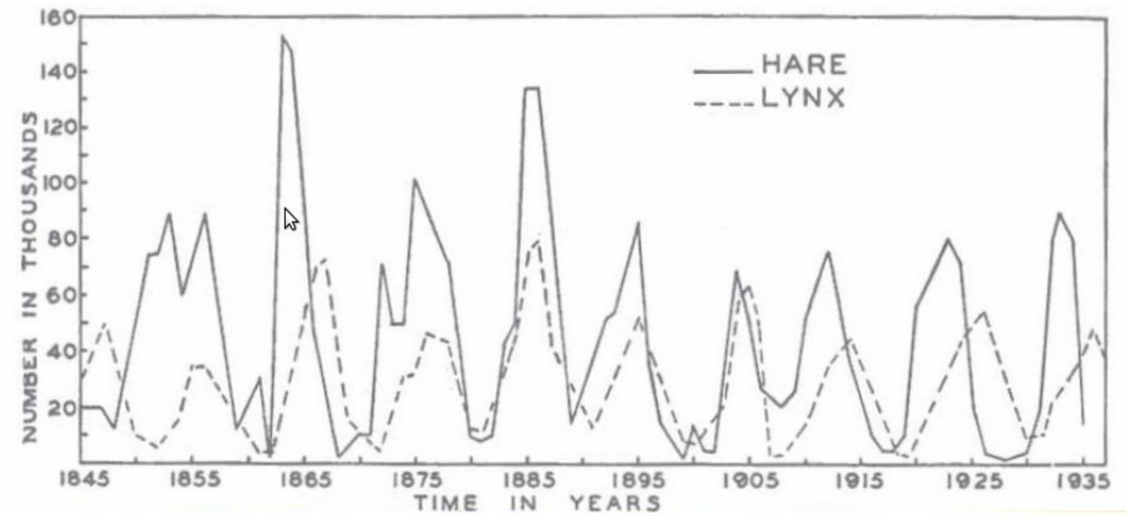


Figure 2 – Relevés

On pourra mettre en rapport les résultats obtenus et ces relevés, ainsi qu'avec les propriétés globales des solutions qu'on a vues en cours.

# 4 Propriétés des méthodes par rapport au hamiltonien

1. Ré-itérez la question de la section 2 avec cette fois ci la méthode d'Euler implicite (on programmera une méthode de Newton dans une fonction `un1 = newton(un,h,tol)` pour la résolution de l'équation non linéaire à chaque étape), puis celle de Crank-Nicholson. Affichez la quantité

$$H(x,y) = dx - cln(x) + by - aln(y)$$

(cf. le cours pour les propriétés de cette fonction) le long de vos trajectoires approchées. Mettez ce résultat en relation avec l'allure de vos trajectoires et le caractère explicite ou implicite des méthodes.

2. En guise d'exercice, on pourra refaire cette question sur l'équation plus simple $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ pour laquelle on a un hamiltonien

$$H(x,y) = x^2 + y^2$$

Le calcul de $H$ le long des trajectoires approchées peut alors se faire à la main et illustrer précisément les observations précédentes.

3. Dans ce cadre, la méthode de Crank-Nicholson est dite *symplectique*. Quelle propriété particulière a-t-elle par rapport aux autres ?

# 5 Ordres de convergence

Comme on ne connait pas d'expression analytique des solutions des équations de Lotka-Volterra, on ne peut pas mettre en valeur l'ordre de convergence des méthodes numériques précédemment employées. On peut cependant le faire sur des problèmes plus simples. Proposez donc un protocole simple pour rendre compte visuellement des divers ordres de convergences (1, 2, 4) des méthodes employées.